详细解答

STEP III 2012，第 13 题

概率与统计 · 截尾正态分布

STEP III 2012，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s3-q13

关键思路

在某区间上的条件期望（conditional expectation），就是 $z\,f(z)$ 在该区间上的积分，再除以该区间的概率。对标准正态分布（standard Normal）而言，$z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 恰好是 $-\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 的导数，因此这个积分可以精确求出。其余的工作只是标准化（standardising），即 $X = \mu + \sigma Z$，以及按 X 的正负号把 $|X|$ 拆开处理。

解答

全文以 $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 表示 Z 的概率密度函数（probability density function），于是 $\Phi'(z) = \phi(z)$ 及 $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$。

第 (i) 部分

在 $a < Z < b$ 的条件下，Z 的条件密度在 (a, b) 上为 $\phi(z)/\mathrm{P}(a < Z < b)$，而 $\mathrm{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$。因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z \mid a < Z < b) &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \int_a^b z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\Phi(b) - \Phi(a))} \Big[-\mathrm{e}^{-z^2/2} \Big]_a^b \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-a^2/2} - \mathrm{e}^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(\Phi(b) - \Phi(a))},
\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\mathrm{e}^{-z^2/2}\right) = z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$。这就是所求的结果。由于该积分收敛（converges），当 $b = \infty$（或 $a = -\infty$）时结果同样成立，只需把 $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$ 及 $\Phi(\infty) = 1$ 代入理解即可。

第 (ii) 部分

设 $X = \mu + \sigma Z$，其中 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ 且 $\sigma > 0$。由于 $\sigma > 0$，

$$X > 0 \iff Z > -\mu/\sigma,$$

所以以 $X > 0$ 为条件，等同于以 $Z > -\mu/\sigma$ 为条件。期望在条件下同样是线性（linear）的，故

$$\mathrm{E}(X \mid X > 0) = \mathrm{E}(\mu + \sigma Z \mid Z > -\mu/\sigma) = \mu + \sigma\,\mathrm{E}(Z \mid Z > -\mu/\sigma),$$

此即所求。

$|X|$ 的平均值。令 $c = \mu/\sigma$。在第 (i) 部分中取 $a = -c$ 及 $b = \infty$，得

$$\mathrm{E}(Z \mid Z > -c) = \frac{\mathrm{e}^{-c^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(1 - \Phi(-c))} = \frac{\phi(c)}{p}, \qquad \text{其中} p = \mathrm{P}(X > 0) = 1 - \Phi(-c).$$

把上一条式子乘以 p，得

$$\mathrm{E}(X;\, X > 0) := \mathrm{E}(X \mid X > 0)\,\mathrm{P}(X > 0) = \mu p + \sigma\phi(c).$$

> **想一想** 怎样才能不再计算第二个积分，就得到 $X < 0$ 部分的贡献?

两部分加起来就是整个平均值：$\mathrm{E}(X;\, X > 0) + \mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mathrm{E}(X) = \mu$（事件 $X = 0$ 的概率为 0）。所以 $\mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mu - \mu p - \sigma\phi(c)$。在 $X < 0$ 时有 $|X| = -X$，因此

$$\begin{aligned} m = \mathrm{E}|X| &= \mathrm{E}(X;\, X > 0) - \mathrm{E}(X;\, X < 0) \\ &= 2(\mu p + \sigma\phi(c)) - \mu \\ &= \mu(2p - 1) + 2\sigma\phi(c). \end{aligned}$$

最后，$2p - 1 = 1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)$ 及 $2\phi(c) = \sqrt{2/\pi}\,\mathrm{e}^{-\mu^2/(2\sigma^2)}$，得

$$m = \mu(1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)) + \sigma\sqrt{2/\pi}\,\exp(-\tfrac{1}{2}\mu^2/\sigma^2),$$

此即所求。

$|X|$ 的方差。关键在于 $|X|^2 = X^2$，所以二阶矩（second moment）无须另作计算：

$$\mathrm{E}(|X|^2) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}X)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

因此

$$\mathrm{Var}|X| = \mu^2 + \sigma^2 - m^2.$$

验算

- 若 $\mu = 0$，则 $|X|$ 服从半正态分布（half-Normal），公式给出 $m = \sigma\sqrt{2/\pi}$，正是熟悉的数值；此时方差为 $\sigma^2(1 - 2/\pi)$，是正数。
- 若 $\mu \gg \sigma$，则 X 几乎总是正数，$\Phi(-\mu/\sigma) \approx 0$，而指数项极小，所以 $m \approx \mu$ 及 $\mathrm{Var}|X| \approx \sigma^2$，与预期相符。
- 把 μ 换成 $-\mu$ 时，m 的公式不变（利用 $1 - 2\Phi(-c) = -(1 - 2\Phi(c))$），与对称性 $|X| \sim |-X|$ 吻合。
- 数值上，取 $\mu = 1$、$\sigma = 2$，得 $m \approx 1.7912$ 及 $\mathrm{Var}|X| \approx 1.7917$，与直接数值积分（quadrature）以及 2×10^5 个数值的模拟（simulation）结果一致。

常见错误

- 在第 (i) 部分忘记除以 $\Phi(b) - \Phi(a)$：单是积分本身只是 $\mathrm{E}(Z;\, a < Z < b)$，并非条件期望。
- 写成 $\mathrm{E}|X| = \mathrm{E}(X \mid X > 0)$：条件期望必须分别以 $\mathrm{P}(X > 0)$ 及 $\mathrm{P}(X < 0)$ 加权。
- 用另一个积分去计算 $\mathrm{E}(X^2)$，其实 $|X|^2 = X^2$ 即可直接得出。

STEP 之外

$|X|$ 的分布称为**折叠正态分布**（folded Normal），而第 (i) 部分中的条件分布则是**截断正态分布**（truncated Normal）；比值 $\phi(c)/\big(1 - \Phi(-c)\big)$ 称为逆米尔斯比率（inverse Mills ratio），在计量经济学（econometrics）中处理删失（censored）或经筛选数据的模型里担当核心角色。技巧 $\phi'(z) = -z\phi(z)$ 亦是用于正态逼近的斯坦因方法（Stein's method）的起点。如想深入了解条件期望，可参阅 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。