详细解答

STEP III 2012，第 12 题

概率与统计 · 几何概率

STEP III 2012，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s3-q12

关键思路

把三角形分成三个以 P 为公共顶点的小三角形，就可看出三段距离之和必定等于高。至于最小值，最简洁的切入点是尾概率（tail probability）$\mathrm{P}(X > x)$。“每段距离都大于 x”这个事件对应一个与原三角形相似（similar）的较小三角形，而相似图形的面积按长度比的平方缩放。在三维空间中，同一思路改用体积亦同样奏效，而体积按立方缩放。

解答

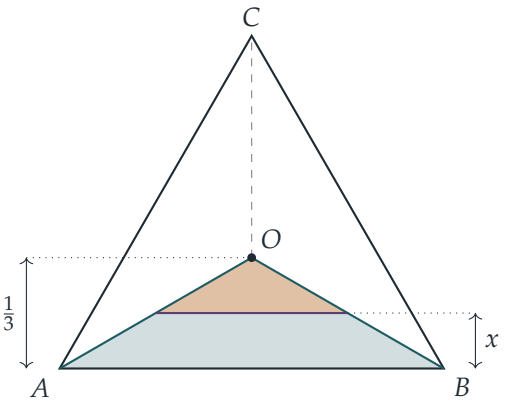
第 (i) 部分

设三角形的边长为 s。由于高为 1，ABC 的面积为 $\frac{1}{2}s$。把 P 与三个顶点连起来，便把 ABC 分成三角形 PAB、PBC 和 PCA。它们的底就是三条边，长度均为 s，而它们的高分别是 x_1、x_2 和 x_3。把面积相加，

$$\tfrac{1}{2}sx_1 + \tfrac{1}{2}sx_2 + \tfrac{1}{2}sx_3 = \tfrac{1}{2}s, \qquad \text{所以} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

得证。

X_1 **为最小值的区域**。与 AB 和 CA 等距的点都在角 A 的角平分线（angle bisector）上。在这条角平分线靠 B 的一侧，P 与 AB 的距离比与 CA 的距离小。同理，P 与 AB 的距离比与 BC 的距离小，当且仅当 P 位于角 B 的角平分线靠 A 的一侧。在等边三角形中，角平分线同时也是中线（median），三者相交于中心 O。因此，$X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ 当且仅当 P 位于三角形 ABO 内（下图阴影部分）。O 到 AB 的距离是高的三分之一，即 $\frac{1}{3}$。



X 的概率密度函数。三个三角形 ABO、BCO 和 CAO 全等（congruent），所以各自的概率都是 $\frac{1}{3}$。（距离相等的情况只会出现在角平分线上，而角平分线的面积为零。）由对称性，X 的分布（distribution）与“在 P 位于 ABO 内的条件下”X_1 的分布相同。在这情况下 $X = X_1$，即 P 到 AB 的距离。

? **想一想** 在三角形 ABO 内，哪些点满足 $X_1 > x$?

它们是位于与 AB 平行、相距 x 的直线上方的点，亦即以 O 为顶点的琥珀色小三角形。它与 ABO 相似，高为 $\frac{1}{3} - x$，而 ABO 的高为 $\frac{1}{3}$，所以它的面积是 ABO 面积的 $((\frac{1}{3} - x)/\frac{1}{3})^2 = (1-3x)^2$ 倍。因此，当 $0 \le x \le \frac{1}{3}$ 时，

$$\mathrm{P}(X > x) = (1-3x)^2, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - (1-3x)^2.$$

此外，由于三段距离之和为 1，X 不可能超过 $\frac{1}{3}$。求导，

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) = 6(1-3x) \quad (0 \le x \le \tfrac{1}{3}),$$

其他情况下 $\mathrm{f}(x) = 0$，得证。

期望值（expected value）。

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{1/3} 6x(1-3x)\,\mathrm{d}x = \Big[3x^2 - 6x^3\Big]_0^{1/3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{9}.$$

第 (ii) 部分

设该点到四个面的距离为 $Y_1, \ldots, Y_4$，并设 $Y = \min(Y_1, \ldots, Y_4)$。每个面的面积都是 S，而体积为 $\frac{1}{3}S \cdot 1$。把该点与四个顶点连起来，便把四面体分成四个较小的四面体。每个小四面体以一个面为底，以其中一个 Y_i 为高，所以

$$\tfrac{1}{3}S(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \tfrac{1}{3}S, \qquad \text{所以} \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1.$$

重心（centroid）到每个面的距离都是 $\frac{1}{4}$，所以内切球（inscribed sphere）的半径为 $\frac{1}{4}$。

想一想 现在集合 $\{Y > y\}$ 是甚么样子?

它是与四个面的距离都大于 y 的点所组成的集合。每个面平行地向内移动 y，得出一个重心相同的较小正四面体（regular tetrahedron）。重心到每个面的距离由 $\frac{1}{4}$ 降至 $\frac{1}{4} - y$，所以比例因子（scale factor）为 $(\frac{1}{4} - y)/\frac{1}{4} = 1 - 4y$。体积按比例因子的立方缩放，所以当 $0 \le y \le \frac{1}{4}$ 时，

$$\mathrm{P}(Y > y) = (1 - 4y)^3.$$

（把同一论证应用于第 (i) 部分的三角形，可直接得出 $(1 - 3x)^2$：内部三角形的内切圆半径（inradius）为 $\frac{1}{3} - x$。）

由于 $Y \ge 0$，我们可以把尾概率积分来求 $\mathrm{E}(Y)$：

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^{1/4} \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} (1 - 4y)^3\,\mathrm{d}y = \left[-\tfrac{1}{16}(1 - 4y)^4\right]_0^{1/4} = \tfrac{1}{16}.$$

如果你较喜欢用概率密度函数，它在 $[0, \frac{1}{4}]$ 上是 $12(1 - 4y)^2$，而 $\int_0^{1/4} 12y(1 - 4y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{16}$，结果一样。

所以到最近一个面的距离的期望值是 $\frac{1}{16}$。

验算

- $\int_0^{1/3} 6(1 - 3x)\,\mathrm{d}x = 1$，所以 f 确实是一个概率密度函数。
- 这里有一个规律：在高为 1 的三角形中，$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$；在高为 1 的四面体中，$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$。在一维情况下，$[0, 1]$ 中随机一点到较近端点的距离的平均值是 $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$，同样吻合。
- 在三角形内取 4×10^5 个随机点进行蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation），得出平均值 0.1110（理论值 $\frac{1}{9} \approx 0.1111$），而直方图（histogram）与 $6(1 - 3x)$ 吻合。在四面体内取 3×10^5 个点，平均值为 0.0625（理论值 $\frac{1}{16} = 0.0625$）。

常见错误

- 对 $\mathrm{P}(X > x)$ 求导时漏了负号：概率密度函数是 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}(X > x)$。
- 忘记内部三角形的高是 $1 - 3x$ 而非 $1 - x$：三条边各自向内移动了 x。
- 在第 (ii) 部分用了比例因子的平方。体积是按立方缩放的。

STEP 之外

这道题目中的两个工具，在大学第一个概率课程里经常出现：通过 $\mathrm{P}(\min > x)$ 求最小值的分布，以及对非负随机变量（random variable）计算 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$。这个规律还可以延续下去：在高为 1 的 n 维单形（simplex）中，到最近一个面的距离的期望值是 $1/(n+1)^2$。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）对这两个工具都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。