详细解答

STEP III 2012，第 11 题

力学 • 下落的对折绳

STEP III 2012，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s3-q11

关键思路

一切都源于绳圈的几何。只要知道质点下落了 x 时，静止部分和移动部分各有多长，就可以写出损失的势能（potential energy）（利用每段直绳的质心（centre of mass））和增加的动能（kinetic energy）（只有质点和移动部分具有速率）。由能量守恒（conservation of energy）便可得出 v^2 作为 x 的函数，而加速度则可由 $\frac{1}{2}v^2$ 对 x 求导得出，因为 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。

解答

模型与几何

我们把绳子视为一条均匀、不可伸长（inextensible）、完全柔软的线，其单位长度质量为

$$\rho = \frac{2M}{2L} = \frac{M}{L},$$

把质点视为点质量，并假设绳圈底部的弯曲部分大小可以忽略。深度由 P 向下量度。

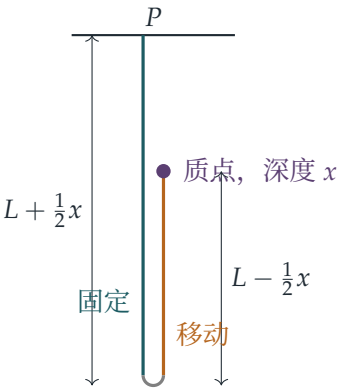
当质点下落了距离 x 时，绳子由两段竖直部分组成，两者在绳圈底部相接，设该处深度为 d：

- 固定部分，由 P 向下延伸至底部，处于静止，长度为 d；
- 移动部分，由质点（深度 x）向下延伸至底部，长度为 $d - x$。

总长度为 $2L$，所以 $d + (d - x) = 2L$，得

$$d = L + \tfrac{1}{2}x, \qquad \text{移动部分长度} = L - \tfrac{1}{2}x.$$

（开始时 $x = 0$，两部分的长度都是 L。）



损失的势能

每段直绳都是均匀的，所以其质心位于中点。在深度 h 处，质量 μ 的势能为 $-\mu gh$。设 $D(x)$ 为整个系统中各部分“质量 × 深度”之和：

$$\begin{aligned} D(x) &= mx + \rho d \cdot \frac{d}{2} + \rho(d-x)\cdot\frac{x+d}{2} \\ &= mx + \frac{\rho}{2}(2d^2 - x^2) \\ &= mx + \rho\left(L^2 + Lx + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\right) = mx + \rho\left(L^2 + Lx - \tfrac{1}{4}x^2\right). \end{aligned}$$

开始时 $D(0) = \rho L^2$，所以损失的势能为

$$g\big(D(x) - D(0)\big) = gx\left(m + \rho L - \tfrac{1}{4}\rho x\right) = \frac{gx}{L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\right),$$

这里用了 $\rho L = M$。

增加的动能

固定部分处于静止。质点以及移动部分上的每一点都具有速率 v（题目要求我们如此假设），所以移动中的质量为 $m + \rho\left(L - \frac{1}{2}x\right)$，而

$$\text{动能} = \tfrac{1}{2}\left(m + M - \frac{Mx}{2L}\right)v^2 = \frac{1}{2L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\right)v^2.$$

系统由静止开始，所以由能量守恒得动能 = 损失的势能：

$$\frac{1}{2L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\right)v^2 = \frac{gx}{L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\right),$$

即

$$v^2 = \frac{2gx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{mL + ML - \frac{1}{2}Mx},$$

此即所求。当 $x < 2L$ 时分母永不为零，因为此时 $ML - \frac{1}{2}Mx > 0$，所以 $mL + ML - \frac{1}{2}Mx > mL \geq 0$。

加速度

为简洁起见，记

$$A = mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx, \qquad B = mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx,$$

于是 $\frac{1}{2}v^2 = gxA/B$，且 $A' = -\frac{1}{4}M$、$B' = -\frac{1}{2}M$（对 x 求导）。

> **想一想** 已知 v^2 是 x 的函数，怎样才能得出加速度?

由链式法则（chain rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，这正是加速度。只要质点在向下移动，即 x 随 t 递增，这个做法便成立。

由乘积法则（product rule）和商法则（quotient rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{gxA}{B}\right) &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{A'B - AB'}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{-\frac{1}{4}MB + \frac{1}{2}MA}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A - \frac{1}{4}Mx}{B} + \frac{MxA}{2B^2}\right].\end{aligned}$$

关键的化简在于 $A - \frac{1}{4}Mx = mL + ML - \frac{1}{2}Mx = B$，所以第一个分数恰好等于 1。因此

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{Mgx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{2\left(mL + ML - \frac{1}{2}Mx\right)^2},$$

此即所求。

加速度大于 g

释放后，$0 < x < 2L$。此时

- 如上所示，$B = mL + M\left(L - \frac{1}{2}x\right) > 0$，所以 $B^2 > 0$；
- $A = B + \frac{1}{4}Mx > B > 0$；
- $M > 0$、$g > 0$ 且 $x > 0$。

所以额外项 $\frac{MgxA}{2B^2}$ 严格为正，对于 $0 < x < 2L$ 中的每个 x，加速度都严格大于 g。（在释放的一刻，$x = 0$，加速度恰好是 g。）

验算

- 若 $M = 0$（轻绳），两条公式都化为自由落体（free fall）的情况：$v^2 = 2gx$，加速度为 g。

- 取 $m = 0.3$、$M = L = 1$ 及 $x = 1$，并设 $g = 9.8$：则 $A = 1.05$、$B = 0.8$，所以 $v^2 = 25.725$，而加速度为 $9.8 + 9.8 \times 1.05/1.28 \approx 17.84\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，远大于 g。在这一点对 $\frac{1}{2}v^2$ 作数值求导，得出相同的值；而由静止开始逐步推进运动方程，亦能重现 v^2 的公式。
- 单位：mL、ML 和 Mx 的单位都是“质量 × 长度”，所以各分数都是无量纲（dimensionless）的，而 v^2 的单位与 gx 相同。

常见错误

- 把移动部分的长度弄错：绳圈底部向下移动 $\frac{1}{2}x$，而不是 x，因为下落一侧所收入的绳子由两侧平分。
- 给固定部分加上动能，或忘记固定部分的势能同样会改变（它变长了，所以其质心下降）。
- 对 v^2 而不是 $\frac{1}{2}v^2$ 求导，结果得出加速度的两倍。

STEP 之外

这是经典的“下落折叠链”问题，是一个运动中的质量随时间改变的系统。这里采用的能量守恒模型预测链端的加速度大于 g；若 $m = 0$，当 $x \to 2L$ 时速率会无限增大，这正是挥鞭时发出爆响背后的原理。在弯曲处能量是否真的守恒，在研究文献中一直有争论；而以真实链条进行的实验显示，加速度确实如这里所述般大于 g。变质量系统（variable-mass systems），以及如何审慎地选用能量或动量（momentum）方法，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。