详细解答

STEP III 2012，第 10 题

力学 · 圆周运动

STEP III 2012，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

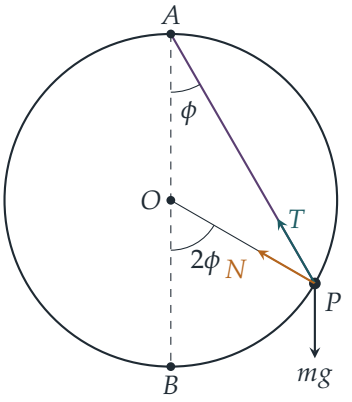
step.maths.org/questions/12-s3-q10

关键思路

一切都归结为一个等腰三角形（isosceles triangle）的几何：它由圆环的圆心、圆环的最高点和小环三点组成。只要看出绳长是 $2a\cos\phi$，而小环所在的半径与竖直向下方向成 2ϕ 角，整道题就只需一条能量方程（energy equation）（求 λ 和速率）和一条径向运动方程（radial equation of motion）（求反作用力）。

解答

我们把小环视为在光滑圆周上运动的质点，并把绳子视为遵守胡克定律（Hooke's law）的轻弹性绳。设 O 为圆环的圆心，A 为其最高点，B 为其最低点，P 为小环，并记 $c = \cos\phi$。



几何

三角形 OAP 中 $OA = OP = a$，所以它是等腰三角形，在 A 和 P 的两个角都是 ϕ。因此

$$AP = 2a\cos\phi, \qquad \angle AOP = \pi - 2\phi, \qquad \angle BOP = 2\phi.$$

于是 P 在 O 下方的深度是 $a\cos 2\phi$，而它在 B 上方的高度是 $a(1-\cos 2\phi) = 2a\sin^2\phi$。绳子（拉紧时）的伸长量（extension）为 $x = 2a\cos\phi - a = a(2c-1)$；当 $2c-1=0$，即 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 时，绳子变得松弛。

弹性模量

圆环是光滑的，反作用力（reaction）与运动方向垂直，所以机械能守恒（conservation of mechanical energy）。在 B（$\phi = 0$）时，小环静止，伸长量为 a，所以弹性势能为 $\lambda a^2/(2a) = \frac{1}{2}\lambda a$。在 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 时，小环再次静止，绳子刚好变得松弛（没有弹性势能），而小环已上升了 $2a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}a$。因此

$$\tfrac{1}{2}\lambda a = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 3mg.$$

这就是弹性模量（modulus of elasticity）。

速率

在一般角度 ϕ 而绳子拉紧时，由 B 起应用能量守恒，得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}\lambda a - \frac{\lambda a^2(2c-1)^2}{2a} - 2mga\sin^2\phi\\ &= \tfrac{3}{2}mga[1-(2c-1)^2] - 2mga(1-c^2)\\ &= \tfrac{3}{2}mga(4c-4c^2) - 2mga + 2mgac^2\\ &= mga(-4c^2+6c-2),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{mv^2}{a} = mg(-8c^2+12c-4) = -4mg(2c-1)(c-1).$$

此式在 $c=1$ 和 $c=\frac{1}{2}$ 时为零，在两者之间为正，这与小环在 $\phi = -\frac{\pi}{3}$ 与 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 之间来回运动相符：小环静止后会滑回并经过 B，到达另一边的对称点，如此往复。整个过程中 $\frac{1}{2} \le c \le 1$，绳子一直拉紧（只在两个端点刚好松弛），张力为

$$T = \frac{\lambda x}{a} = 3mg(2c-1).$$

反作用力

设 N 为反作用力指向 O 的分量，如图所示（结果可能是负数）。我们沿 PO 指向圆心的方向分解各力：

- 张力沿 PA 作用，而 PA 与 PO 成 ϕ 角（即等腰三角形的底角），所以张力指向 O 的分量是 $T\cos\phi$；
- OP 与竖直向下方向成 2ϕ 角，所以重力有一个背离 O 的分量 $mg\cos 2\phi$。

> **想一想** 为甚么这里重力的分量是向外而不是向内?

当 $\phi < \frac{\pi}{4}$ 时，小环在 O 的下方，重力把它拉离圆心；单一表达式 $-mg\cos 2\phi$（指向 O）已涵盖两种情况，因为当 P 越过 O 的水平高度时，$\cos 2\phi$ 会变号。

沿指向圆心的方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$N + T\cos\phi - mg\cos 2\phi = \frac{mv^2}{a}.$$

代入 T、mv^2/a 及 $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$：

$$\begin{aligned} N &= mg(-8c^2 + 12c - 4) - 3mg(2c-1)c + mg(2c^2 - 1) \\ &= mg(-8c^2 + 12c - 4 - 6c^2 + 3c + 2c^2 - 1) \\ &= -mg(12c^2 - 15c + 5). \end{aligned}$$

因此反作用力的大小为

$$R = (12\cos^2\phi - 15\cos\phi + 5)\, mg,$$

正如所求，前提是括号内的式子永不为负，下面我们便证明这一点。（负号告诉我们，在整个运动中，圆环都是把小环向外推，即背离 O。）

R 永不为零

二次式 $12c^2 - 15c + 5$ 的判别式（discriminant）为 $15^2 - 4\cdot 12\cdot 5 = 225 - 240 = -15 < 0$，而首项系数（leading coefficient）为正，所以它对每个实数 c 都严格为正。配方（completing the square）得

$$12c^2 - 15c + 5 = 12\left(c - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{5}{16} \geq \tfrac{5}{16},$$

所以在整个运动中 $R \geq \frac{5}{16}mg > 0$，最小值出现在 $\cos\phi = \frac{5}{8}$ 时（此值位于 $[\frac{1}{2}, 1]$ 内，所以确实能取到）。

验算

- 在 B（$c = 1$）：小环静止，$T = 3mg$ 向上，重力 mg 向下，所以圆环必须以 $2mg$ 向下推。公式给出 $(12 - 15 + 5)mg = 2mg$。
- 在松弛点（$c = \frac{1}{2}$）：没有张力，速率为零，P 在 O 上方 $\frac{a}{2}$ 处，所以径向反作用力与向内的重力分量 $mg\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}mg$ 平衡。公式给出 $(3 - 7.5 + 5)mg = \frac{1}{2}mg$。

- 我们以数值方法积分运动方程（四阶龙格－库塔法（RK4），从稍为偏离 B 的位置出发）：小环在距 B 角度 $2.094 \approx \frac{2\pi}{3}$ 处停下，计算所得的反作用力与公式的误差在 10^{-7} 以内，其最小值为 $0.3125\,mg = \frac{5}{16}mg$。

常见错误

- 把小环的角位置当作 ϕ 而不是 2ϕ：圆周角是圆心角的一半。
- 在胡克定律或弹性势能中，用了整条绳长 $2a\cos\phi$，而不是伸长量 $2a\cos\phi - a$。
- 假设反作用力指向内，然后对得到负数答案感到困惑；其实题目只要求反作用力的大小。

STEP 之外

小环只有一个自由度（degree of freedom），处理这类系统最简洁的方法，是用单一坐标写出能量（或拉格朗日（Lagrangian））表述，之后再由牛顿定律求出像 R 这样的约束力（constraint force）。这种分工——由能量得出运动方程，由分解力得出约束力——正正是大学一年级力学课程处理“金属线上的珠子”问题的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）便以这种思路讲解带约束的圆周运动和能量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。