详细解答

STEP III 2012，第 1 题

纯数学 · 非线性微分方程

> **STEP III 2012，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q1

关键思路

两条微分方程（differential equation）都是二阶（second order）而且非线性（non-linear）的，所以没有现成的标准解法。窍门在于：只要适当地选取 n，$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 中的括号就可以与每条方程的左边吻合。这样，方程便表示 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 等于某个可以立即积分的式子，从而得到一条可以分离变量（separation of variables）的一阶（first-order）方程。

解答

预备结果

记 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 及 $y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$。由乘积法则（product rule），并对 y^n 及 $(y')^2$ 使用链式法则（chain rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= ny^{n-1}y'\,(y')^2 + y^n \cdot 2y'y'' \\ &= y^{n-1}y'(n(y')^2 + 2yy''),\end{aligned}$$

这正是所求的结果。

第 (i) 部分

左边是 $(y')^2 + 2yy''$，即 $n = 1$ 时的括号。因此取 $z = y(y')^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y'((y')^2 + 2yy'') = y'\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

积分得 $y(y')^2 = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$。在 $x = 0$ 时有 $y = 1$ 及 $y' = 0$，所以 $0 = \frac{2}{3} + C$，于是

$$y\,(y')^2 = \tfrac{2}{3}(y^{3/2} - 1). \qquad (*)$$

想一想 $(*)$ 只告诉我们 $(y')^2$。开平方时应取哪个符号？而 $y\equiv 1$（它使两边都等于零）又是否可能？

常数 $y\equiv 1$ 并不是原方程的解：代入会得到 $0=1$。事实上，把 $x=0$ 代入方程得 $0+2y''(0)=1$，所以 $y''(0)=\frac12>0$。因此 y 在 $x=0$ 处取极小值，而对细小的 $x>0$ 有 $y'>0$。此外，方程在 $x\mapsto -x$ 下保持不变，所以解是偶函数（even function），我们可以只考虑 $x>0$、$y'>0$、$y>1$ 的情况。

把 $(*)$ 乘以 y，取正平方根，再分离变量：

$$\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{y^{3/2}-1}}=\sqrt{\tfrac23}.$$

代换 $w=y^{3/2}-1$，则 $\mathrm{d}w=\frac32 y^{1/2}\,\mathrm{d}y$。左边变成 $\frac23 w^{-1/2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$，由 $x=0$（此时 $w=0$）起积分，

$$\tfrac43\sqrt{w}=\sqrt{\tfrac23}\,x\quad\Longrightarrow\quad w=\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac23\,x^2=\tfrac38x^2.$$

所以 $y^{3/2}=\frac38x^2+1$，而由偶函数性质，此式对 $x<0$ 亦成立。因此

$$y=(\tfrac38x^2+1)^{2/3},$$

得证。

直接验算：设 $u=\frac38x^2+1$，则 $y'=\frac23u^{-1/3}\cdot\frac34x=\frac12xu^{-1/3}$，所以 $y(y')^2=u^{2/3}\cdot\frac14x^2u^{-2/3}=\frac14x^2$。另一方面 $\frac23(y^{3/2}-1)=\frac23\cdot\frac38x^2=\frac14x^2$，所以 $(*)$ 成立。

第 (ii) 部分

现在左边是 $(y')^2-yy''$。我们需要 $n(y')^2+2yy''$ 是它的倍数，所以 $n:2=1:-1$，得 $n=-2$。取 $z=y^{-2}(y')^2$（这是可以的，因为 y 接近 1，故不为零），

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{-3}y'(-2(y')^2+2yy'')=-2y^{-3}y'((y')^2-yy'')=-2y^{-3}y'\,(-y^2)=\frac{2y'}{y},$$

这里用了方程的形式 $(y')^2-yy''=-y^2$。积分得 $z=2\ln y+C$，而 $x=0$ 给出 $0=0+C$。所以

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2=2\ln y.$$

设 $v=\ln y$，则 $v'=y'/y$，方程变成 $(v')^2=2v$，且 $v(0)=0$。

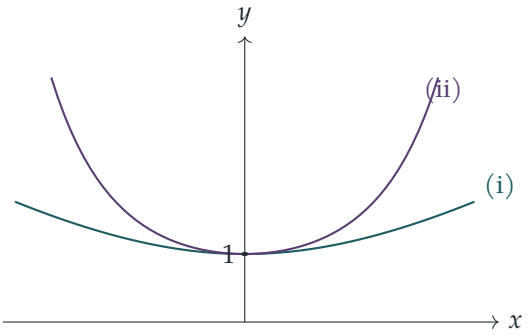
与第 (i) 部分一样，$v\equiv 0$（即 $y\equiv 1$）满足这条一阶方程，却不满足原方程（代入会得到 $1=0$）。在 $x=0$ 时，原方程给出 $0-y''(0)+1=0$，所以 $y''(0)=1>0$。方程同样在 $x\mapsto -x$ 下不变，所以我们取 $x>0$，此时 $v'>0$。于是

$$\frac{v'}{\sqrt{2v}}=1\quad\Longrightarrow\quad\sqrt{2v}=x\quad\Longrightarrow\quad v=\tfrac12x^2,$$

而由偶函数性质，此式对所有 x 成立。因此

$$y = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

验算：$y' = xy$ 及 $y'' = (1+x^2)y$，所以 $(y')^2 - yy'' + y^2 = y^2(x^2 - 1 - x^2 + 1) = 0$。此外 $y(0) = 1$ 及 $y'(0) = 0$。



验算

- 两个解都是偶函数，并在 $x = 0$ 处取极小值 1，与 $y''(0)$ 的值所预示的一致。
- 第 (ii) 部分有一条更快的途径：直接把 $y = \mathrm{e}^v$ 代入方程，得 $y' = v'\mathrm{e}^v$ 及 $y'' = (v'' + (v')^2)\mathrm{e}^v$，所有项消去后只剩 $v'' = 1$。所以立即得 $v = \frac{1}{2}x^2$。
- 数值上，以龙格－库塔法（Runge–Kutta method）由 $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ 求解 (i)，得 $y(2) \approx 1.842016$，与 $(\frac{5}{2})^{2/3}$ 吻合。对 (ii) 则得 $y(1) \approx 1.648721 = \mathrm{e}^{1/2}$。

常见错误

- 忘记 z 的积分常数(constant of integration)。在第 (i) 部分，初始条件(initial conditions)使它不为零：$C = -\frac{2}{3}$。
- 在第 (ii) 部分照搬类比而选 $n = 1$。$(y')^2$ 与 yy'' 的系数之比必须吻合，这就迫使 $n = -2$。
- 从一阶方程接受 $y \equiv 1$，却没有用原方程加以检验。

STEP 之外

这里的方法是二阶方程的积分因子(integrating factor)。把 $(y')^2 + 2yy''$ 乘以 y'，就变成一个恰当导数 (exact derivative)，正如把 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 乘以 $\dot{x}$ 便得到能量守恒 (conservation

of energy）一样。像这两条不显含 x 的方程，总可以把 $p = y'$ 看成 y 的函数，从而降为一阶。对 $y \equiv 1$ 的顾虑，让我们窥见解的非唯一性（non-uniqueness）：$v' = \sqrt{2v}$ 在 $v = 0$ 处不满足利普希茨条件（Lipschitz condition）。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵盖了降阶法（reduction of order）以及存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。