详细解答

STEP II 2012，第 9 题

力学 • 抛体运动

STEP II 2012，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

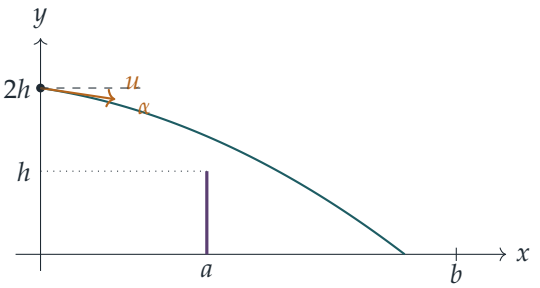
step.maths.org/questions/12-s2-q9

关键思路

把球的高度写成它与抛出点之间水平距离 x 的函数，也就是轨迹方程（trajectory equation）。这样，“越过球网”就是 $x = a$ 处的一个不等式，而“在 b 之前着地”则是关于飞行时间（time of flight）的一个不等式。最后一部分之所以行得通，是因为两个条件原来都是同一个量 $1/u^2$ 的界：一个是上界（upper bound），一个是下界（lower bound）。因此下界必须小于上界，u 便随之消去。

解答

我们把球视为只受重力作用而自由运动的质点（particle），忽略空气阻力（air resistance）和自旋（spin），并设 $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$。取原点为抛出点正下方的地面，$x$ 轴水平指向球网，y 轴铅直向上。



越过球网

初速度的水平分量为 $u\cos\alpha$，铅直分量为 $u\sin\alpha$，方向向下。经过时间 t 后，

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = 2h - ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = x/(u\cos\alpha)$ 消去 t，得轨迹

$$y = 2h - x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2u^2}.$$

水平速度是正的常数，所以球恰好一次到达 $x = a$，而当该处 $y > h$ 时，球便越过球网：

$$2h - a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} > h \iff \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} < h - a\tan\alpha.$$

两边乘以正数 $2/(ga^2\sec^2\alpha)$，得

$$\frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha},$$

此即所求。

在 b 之前着地

球下降了 $2h$ 时便着地，即 $\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\alpha - 2h = 0$ 之时。这个关于 t 的二次方程（quadratic equation）的两个根（roots）异号（两根之积为 $-4h/g < 0$），而着地时间是正根：

$$T = \frac{-u\sin\alpha + \sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh}}{g}.$$

球在水平距离 b 之前着地，当且仅当 $uT\cos\alpha < b$，即 $T < \dfrac{b}{u\cos\alpha}$（因为 $u\cos\alpha > 0$）。两边乘以 g 再加上 $u\sin\alpha$，得

$$\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh} < \frac{bg}{u\cos\alpha} + u\sin\alpha,$$

这就是第二个结果。

最后的不等式

想一想 两个涉及 u 的条件，怎样才能得出一个不含 u 的条件？

第一个结果是 $1/u^2$ 的上界。如果能把第二个结果化为 $1/u^2$ 的下界，那么无论 u 是多少，下界都必须小于上界。

第二个不等式两边皆为正（右边为正，是因为 $\sin\alpha \geq 0$ 且 $\cos\alpha > 0$），所以两边平方后不等号方向不变：

$$u^2\sin^2\alpha + 4gh < \frac{b^2g^2}{u^2\cos^2\alpha} + 2bg\tan\alpha + u^2\sin^2\alpha.$$

$u^2\sin^2\alpha$ 项互相抵消，剩下 $2g(2h - b\tan\alpha) < b^2g^2\sec^2\alpha/u^2$，即

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2}.$$

与第一个结果合并，得

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha}.$$

约去正因子 $2/(g\sec^2\alpha)$，再整条乘以 $a^2b^2 > 0$，

$$\begin{aligned} & a^2(2h - b\tan\alpha) < b^2(h - a\tan\alpha) \\ \iff\quad & (ab^2 - a^2b)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2) \\ \iff\quad & ab(b - a)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2). \end{aligned}$$

想一想 可以除以 $b - a$ 吗?

可以，但正负号很重要。在 $x = a$ 处，球仍高于高度 $h > 0$，所以它的着地距离大于 a；而它又在 b 之前着地。因此 $b > a$，故 $ab(b - a) > 0$，相除后不等号方向保持不变：

$$\tan\alpha < \frac{h(b^2 - 2a^2)}{ab(b - a)}.$$

验算

- 单位（units）：$a\tan\alpha$ 与 h 一样是长度，ga^2/u^2 也是长度，所以 $1/u^2$ 的每个界的单位都是 $\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}^{-2}$，理应如此。
- 当 $\alpha = 0$ 时，最终结果变成 $b^2 > 2a^2$。事实上，水平抛出的球到 $x = a$ 时下降少于 h；由于下降量与 x^2 成正比，到 $x = \sqrt{2}\,a$ 时它下降少于 $2h$，所以它在 $\sqrt{2}\,a$ 之外着地，故 $b > \sqrt{2}\,a$。
- 数值上，取 $g = 9.8$、$u = 12$、$\alpha = 0.2$、$h = 1.5$，逐步模拟运动得着地距离为 6.7759，与 $uT\cos\alpha$ 吻合。在 20 000 个随机情况中，首两个不等式与“越过球网”及“在 b 之前着地”完全对应，而每当两者同时成立时，最后的不等式亦成立。

常见错误

- 把初速度的铅直分量当成 $+u\sin\alpha$：球是在水平线*以下*抛出的。
- 未检查两边是否皆为正，便把不等式平方。
- 除以 $b-a$ 时没有说明它为何是正数。

STEP 之外

最后一部分是在不等式之间消去参数（eliminating a parameter）的一个小例子：若 L 和 U 不含 u，则不等式组 $L<1/u^2<U$ 有解当且仅当 $L<U$。把同一想法系统地应用于大量线性不等式，便是 Fourier–Motzkin 消去法（Fourier–Motzkin elimination），它是线性规划（linear programming）的基础之一。至于力学方面，包括考虑空气阻力、轨迹不再是抛物线（parabola）的抛射体（projectile）运动，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。