详细解答

# STEP II 2012，第 8 题

纯数学 · 非线性递推关系

**STEP II 2012，第 8 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q8

## 关键思路

递推关系（recurrence）$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2$ 是非线性（non-linear）的，但它对每一个 $n$ 都成立，所以把它写成两个相邻 $n$ 值的形式再相减，就能消去那个麻烦的常数 $q^2$。剩下的式子说明比值 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ 永远不变，于是数列便化为一个常系数为 $p$ 的线性递推关系（linear recurrence）。开首的不等式正正就是 $p > 2$ 这个命题，而它正是推动数列增长的原因。

## 解答

### 不等式

把所有项化为公分母（common denominator）$\alpha\beta$，

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

由于 $\beta - \alpha > q > 0$，两边平方（两边皆为正）得 $(\beta - \alpha)^2 > q^2$，所以分子为正。因为 $\alpha, \beta > 0$，分母 $\alpha\beta$ 亦为正。因此该式为正，得证。

### 第一个恒等式

把递推关系两边乘以 $u_{n-1}$：对每一个 $n \geq 1$，

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2.$$

以 $n+1$ 代替 $n$（这仍然容许，因为 $n+1 \geq 1$），

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - q^2.$$

以第二式减去第一式，消去 $q^2$：

$$u_n u_{n+2} - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

移项整理后得

$$u_n^2 + u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{即} \qquad u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_{n+1})$$

对所有 $n \geq 1$ 成立，这就是所求的恒等式（identity）。

### 线性递推关系

> **想一想** 刚证明的恒等式含有四个不同的项。它怎样能给出只含单一常数 $p$ 的递推关系?

把它除以 $u_n u_{n+1}$；由于数列没有任何一项为零，这是容许的：

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} \qquad (n \geq 1).$$

所以量 $v_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ 对所有 $n \geq 1$ 满足 $v_{n+1} = v_n$：它是常数。设其公共值为 $p$；则 $u_{n+1} + u_{n-1} = pu_n$，即

$$u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

要求 $p$，取 $n = 1$。由递推关系得 $u_2 = (\beta^2 - q^2)/\alpha$，所以

$$p = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 - q^2}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

这正是第一部分中的式子，所以当 $\beta - \alpha > q$ 时，我们已经知道 $p > 2$。

### 当 $\beta > \alpha + q$ 时数列递增

设 $d_n = u_{n+1} - u_n$。利用线性递推关系的形式 $u_{n+1} = pu_n - u_{n-1}$，

$$d_n - d_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = (p-2)u_n.$$

> **想一想** 我们知道 $p - 2 > 0$，但为甚么 $(p-2)u_n$ 会是正数？我们还未知道 $u_n > 0$。

正值性与增长必须一并证明，方法是归纳法（induction）。命题：对每一个 $n \geq 1$，$u_n > 0$ 且 $d_{n-1} > 0$。

当 $n = 1$：$u_1 = \beta > 0$ 且 $d_0 = \beta - \alpha > q > 0$。

假设对某个 $n \geq 1$ 有 $u_n > 0$ 及 $d_{n-1} > 0$。那么由于 $p > 2$,

$$d_n = d_{n-1} + (p-2)u_n > 0, \qquad u_{n+1} = u_n + d_n > 0,$$

这就是 $n+1$ 的情况。由归纳法，对每一个 $n \geq 0$ 都有 $d_n = u_{n+1} - u_n > 0$，所以数列严格递增（strictly increasing）。（事实上，差本身也在递增，所以增长比线性更快。由于每一项都是正数，在这情况下“没有任何一项为零”这个条件自动成立。）

**$\beta = \alpha + q$ 的情况**

此时 $(\beta - \alpha)^2 - q^2 = 0$，所以 $p = 2$ 刚好成立，且 $d_n - d_{n-1} = 0$。所有差都等于 $d_0 = \beta - \alpha = q$，所以数列是等差数列（arithmetic progression）

$$u_n = \alpha + nq.$$

由于 $q > 0$，它仍然严格递增，但现在只是线性增长。直接验证：$(\alpha + (n+1)q)(\alpha + (n-1)q) = (\alpha + nq)^2 - q^2$，所以这个数列确实满足原来的递推关系。

## 验算

- 取 $\alpha = 1$、$\beta = 4$、$q = 2$（于是 $\beta > \alpha + q$）。递推关系给出 $1, 4, 12, 35, \frac{407}{4}, \ldots$，而 $p = \frac{1+16-4}{4} = \frac{13}{4}$；确实 $\frac{13}{4} \cdot 4 - 1 = 12$ 及 $\frac{13}{4} \cdot 12 - 4 = 35$。
- 取 $\alpha = 1$、$q = 2$、$\beta = 3$，各项为 $1, 3, 5, 7, \ldots$，即最后一部分的等差数列。
- 我们以精确的有理数运算，对数百组随机的 $\alpha, \beta, q$ 验证了两个恒等式，并验证了每当 $\beta > \alpha + q$ 时数列都是递增的。

## 常见错误

- 未先知道 $u_n > 0$，便由 $p > 2$ 推出 $d_n > d_{n-1}$：这两个事实必须放在同一个归纳法中。
- 除以 $u_n u_{n+1}$ 时没有指出它不等于零。
- 忘记相减那一步用到的是指标为 $n+1$ 的递推关系，而这需要 $n+1 \geq 1$。

## STEP 之外

一个暗中满足某线性递推关系的非线性递推关系，我们说它具有一个隐藏的不变量（invariant）：这里是 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$，或等价地 $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = q^2$，它是力学中守恒量（conserved quantity）的离散类比。线性递推关系 $u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0$ 的解为

$u_n = A\lambda^n + B\lambda^{-n}$，其中 $\lambda + \lambda^{-1} = p$；当 $p > 2$ 时它是实数且呈指数增长，而在重根（repeated root）的情况 $p = 2$ 下则变为 $A + Bn$，正正就是上面的二分情况（dichotomy）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了更多 STEP 风格的递推关系题目，而与微分方程（differential equations）的平行关系，则在 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）中有所发展。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。