详细解答

STEP II 2012，第 7 题

纯数学 · 向量与圆

STEP II 2012，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

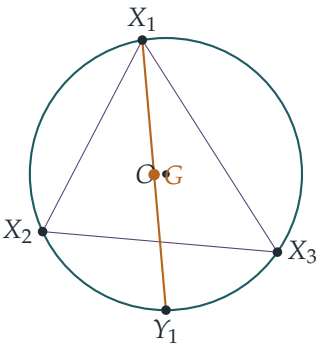
step.maths.org/questions/12-s2-q7

关键思路

点 Y_1 位于通过 X_1 和 G 的直线上，所以它的位置向量（position vector）是 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{g}$ 的简单组合，只含一个未知纯量（scalar）。关于 Y_1，我们唯一知道的另一件事是它在单位圆（unit circle）上，因此 $|\overrightarrow{OY_1}|^2 = 1$ 给出一条关于 λ_1 的方程。这是一条二次方程（quadratic equation），但其中一个根事先已显而易见：该直线在 X_1 本身与圆相交，所以这个根可以先因式分解出来。

解答

设 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$ 及 $\lambda = \lambda_1$。由于每个 $\mathbf{x}_i$ 都是单位向量（unit vector），所以 $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$。



Y_1 的位置向量

由 $\overrightarrow{GY_1} = -\lambda\overrightarrow{GX_1}$ 得 $\mathbf{y}_1 - \mathbf{g} = -\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{g})$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY_1} = \mathbf{y}_1 &= (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}(1+\lambda)(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}((1-2\lambda)\mathbf{x}_1 + (1+\lambda)(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)),\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{3}(1+\lambda) - \lambda = \frac{1}{3}(1-2\lambda)$。这就是所求的表达式。

求 λ_1

因为 Y_1 在圆上，$|\mathbf{y}_1|^2 = 1$，所以 $|3\mathbf{y}_1|^2 = 9$。我们需要

$$|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 1+2\alpha+1 = 2+2\alpha, \qquad \mathbf{x}_1\cdot(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) = \beta+\gamma.$$

因此，把 $|3\mathbf{y}_1|^2$ 展开为它与自身的点积（dot product），得

$$(1-2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2(2+2\alpha) + 2(1-2\lambda)(1+\lambda)(\beta+\gamma) = 9.$$

按 λ 的幂整理，再除以 2：

$$(3+\alpha-2\beta-2\gamma)\lambda^2 + (2\alpha-\beta-\gamma)\lambda - (3-\alpha-\beta-\gamma) = 0.$$

为了简洁，设

$$A = 3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad B = 3-\alpha-\beta-\gamma,$$

并留意中间的系数正好是 $A-B$。所以方程为 $A\lambda^2 + (A-B)\lambda - B = 0$，可因式分解为：

$$(\lambda+1)(A\lambda - B) = 0.$$

> ? **想一想** 为甚么 $\lambda = -1$ 会是一个根？为甚么可以舍去它？

把 $\lambda = -1$ 代入 $\mathbf{y}_1 = (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$，得 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$。通过 X_1 和 G 的直线上每一点都具有 $(1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ 的形式，而这条直线除了在 Y_1 之外，也在 X_1 与圆相交，所以这条二次方程必然以 $\lambda = -1$ 为根。题目给出 $\lambda_1 > 0$，所以 $\lambda_1 \neq -1$，因此 $A\lambda_1 = B$。

还须确认可以除以 A。若 $A = 0$，则 $A\lambda_1 = B$ 迫使 $B = 0$。但

$$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 3+2(\alpha+\beta+\gamma), \qquad \text{所以} \qquad B = \tfrac{1}{2}(9 - |\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2) = \tfrac{9}{2}(1-|\mathbf{g}|^2).$$

由三角不等式（triangle inequality），$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3| \le 3$，而等号只在三个单位向量相等时成立；由于三点互不相同，所以 $B > 0$。因此 $A \neq 0$，且

$$\lambda_1 = \frac{B}{A} = \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3+\alpha-2\beta-2\gamma},$$

得证。

最后一部分

由于 $\overrightarrow{GY_1} = -\lambda_1 \overrightarrow{GX_1}$ 且 $\lambda_1 > 0$，长度满足 $GY_1 = \lambda_1 GX_1$，所以

$$\frac{GX_1}{GY_1} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{3+\alpha-2\beta-2\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

把标号轮换（$1 \to 2 \to 3 \to 1$，这会把 $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$），用同样的论证便得到另外两个比。分母 $B = 3-\alpha-\beta-\gamma$ 是对称的，所以三者的分母相同，而分子分别为

$$3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad 3+\beta-2\gamma-2\alpha, \qquad 3+\gamma-2\alpha-2\beta.$$

三者之和为 $9+(1-2-2)(\alpha+\beta+\gamma) = 9-3(\alpha+\beta+\gamma) = 3B$。因此

$$\frac{GX_1}{GY_1} + \frac{GX_2}{GY_2} + \frac{GX_3}{GY_3} = \frac{3B}{B} = 3.$$

验算

- 等边三角形：此时 $G = O$，每条通过 G 的弦都是直径，所有比都等于 1。在公式中，$\alpha = \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$，得 $\lambda_1 = \frac{9/2}{9/2} = 1$。
- 这里有一个几何解读：$A = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - 2\mathbf{x}_1|^2 = \frac{9}{2} GX_1^2$ 及 $B = \frac{9}{2}(1 - OG^2)$，所以 $\lambda_1 = B/A$ 表示 $GX_1 \cdot GY_1 = 1 - OG^2$，即相交弦定理（intersecting chords theorem），亦即圆幂（power of a point）定理。
- 数值验算：取 X_1, X_2, X_3 位于角度 0、1 和 2.5 弧度处，三个比 GX_i/GY_i 约为 1.13、0.31 和 1.57，其和在机器精度内等于 3。我们用同样方法测试了 20 000 个随机三角形。

常见错误

- 忘记 $|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|^2$ 含有交叉项 2α，而不只是 $1+1$。
- 硬套二次方程求根公式，而没有看出根 $\lambda = -1$。
- 除以 $3+\alpha-2\beta-2\gamma$ 时没有说明它为何不等于零。

STEP 之外

这道题中隐藏的恒等式 $GX_1 \cdot GY_1 = 1 - OG^2$，就是一点对于圆的圆幂，而上述点积计算正是它的向量证明。用内积来表述几何，让长度和角度全都由 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 得出，这是大学第一个线性代数（linear algebra）课程中内积空间（inner-product space）的起点。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）就是从这个观点展开的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。