详细解答

STEP II 2012，第 6 题

纯数学 · 圆内接四边形的面积

STEP II 2012，第 6 题

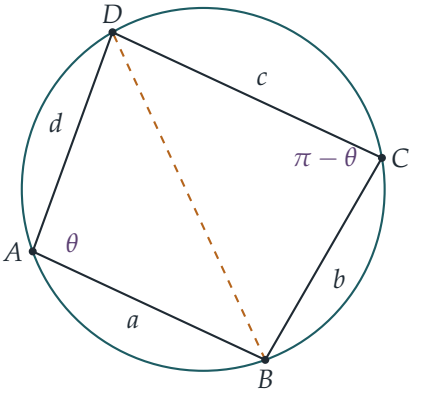
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q6

关键思路

对角线（diagonal）BD 把四边形分成两个三角形，而 BD 可以用余弦定理（cosine rule）以两种方式表示。圆内接四边形（cyclic quadrilateral）的特别之处在于对角之和为 π，所以 C 处的角是 $\pi - \theta$。于是 $\cos C = -\cos\theta$ 而 $\sin C = \sin\theta$，余弦定理和面积公式 $\frac{1}{2}xy\sin(\text{夹角})$ 都只涉及同一个角 θ。之后，利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 再加上细心的因式分解（factorising），便可完成余下的工作。

解答



求 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$

由于 $ABCD$ 是圆内接四边形，对角 DAB 与 BCD 之和为 π，所以 $\angle BCD = \pi - \theta$。因此

$$\cos\angle BCD = -\cos\theta, \qquad \sin\angle BCD = \sin\theta.$$

对对角线 BD 应用余弦定理，先在三角形 ABD 中（两边为 a、d，夹角为 θ），再在三角形 CBD 中（两边为 b、c，夹角为 $\pi-\theta$）：

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

把含 $\cos\theta$ 的项归在一起，得 $2(ad+bc)\cos\theta = a^2+d^2-b^2-c^2$，所以

$$\cos\theta = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$

对角线 BD 把四边形分成这两个三角形，所以它们的面积之和为 Q：

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin\theta + \tfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta) = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad \sin\theta = \frac{2Q}{ad+bc}.$$

（由于所有边长都是正数，我们可以除以 $ad+bc$。）

$16Q^2$ 的公式

把两个表达式代入 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$：

$$\frac{4Q^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1.$$

两边乘以 $4(ad+bc)^2$，

$$16Q^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

此即所求。

婆罗摩笈多公式

右方是平方差（difference of two squares）$X^2 - Y^2$，其中 $X = 2(ad+bc)$，$Y = a^2+d^2-b^2-c^2$。

? **想一想** 怎样把 $X-Y$ 和 $X+Y$ 化成一次因式的乘积?

把各项分组，使每一组再次成为平方差。把含 a,d 的项放在一起，含 b,c 的项放在一起：

$$X - Y = (b^2+2bc+c^2) - (a^2-2ad+d^2) = (b+c)^2 - (a-d)^2,$$
$$X + Y = (a^2+2ad+d^2) - (b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2 - (b-c)^2.$$

再把两者各自因式分解，

$$\begin{aligned}16Q^2 &= (X-Y)(X+Y)\\ &= (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c).\end{aligned}$$

设 $2s = a+b+c+d$，则每个括号都等于 $2s$ 减去某一边的两倍：例如 $b+c+d-a = 2s-2a$。所以四个括号分别是 $2(s-a)$、$2(s-d)$、$2(s-b)$ 和 $2(s-c)$，而

$$16Q^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d), \qquad \text{即} \qquad Q^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

这就是婆罗摩笈多（Brahmagupta）公式。

三角形的面积

每个三角形都是圆内接的，因为它的三个顶点都在其外接圆（circumcircle）上。现在让边 DA 缩短至零，即 D 沿圆周滑向 A。这时 $ABCD$ 变成边长为 a、b、c 的三角形 ABC，而 $d = 0$。公式两边都随 D 连续变化，所以在极限下公式仍然成立。设 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$，则三角形的面积 Δ 满足

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad \text{所以} \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

这就是海伦公式（Heron's formula）。

验算

- 单位正方形是圆内接四边形，$s = 2$，而 $(2-1)^4 = 1$ 正是它的面积。对于 3–4–5 三角形，$s = 6$，而 $\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$。
- 对于长方形，$a = c$ 且 $b = d$，所以 $\cos\theta = 0$；这是对的，因为长方形的每个角都是 $\frac{\pi}{2}$。
- 我们在圆上随机放置了 20 000 个圆内接四边形，把 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 和 Q^2 的公式与实际的角及鞋带公式（shoelace formula）算出的面积比较，两者相差不超过 3×10^{-12}。海伦公式亦与 1000 个随机三角形的结果吻合。

常见错误

- 忘记 $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$。这会把 $+2bc\cos\theta$ 变成减号，之后的一切都会出错。
- 试图把 $4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2$ 完全展开。把它当作平方差分解两次，快得多，也不容易出错。

STEP 之外

对于一般的（不一定是圆内接的）四边形，Bretschneider 公式可给出其面积。该公式减去一项 $abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$，其中 α 和 γ 是一对对角，所以在边长固定时，圆内接四边形的面积最大。海伦公式的因式分解形式亦即时显示：三角形面积为零，当且仅当三角不等式（triangle inequality）取等号。如想看更多这种风格的几何，可参阅考克斯特（Coxeter）与 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《几何的新探索》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。