详细解答

STEP II 2012，第 5 题

纯数学 · 倒数函数的描绘

STEP II 2012，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q5

关键思路

两条曲线都是倒数（reciprocal）形式，所以我们在脑中先想像分母的图像，再把它“倒过来”：分母为零之处会出现垂直渐近线（vertical asymptote），分母很大之处 y 接近 0，而分母的转向点（turning point）亦是曲线的转向点。在第 (ii) 部分，两个二次因式关于 a 与 b 的中点互为镜像，因此把原点移到该中点，g 便成为新变量的偶函数（even function），而驻点（stationary point）则可从一条关于 t^2 的二次方程直接得出。

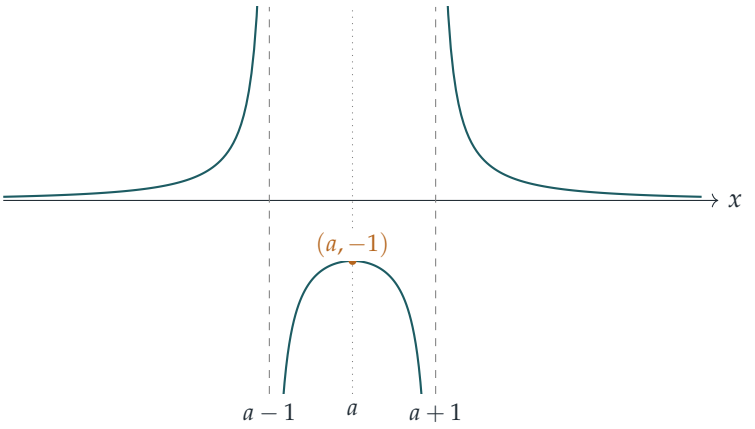
解答

第 (i) 部分

设 $D(x) = (x-a)^2 - 1$，于是 $f = 1/D$。分母 D 是一条抛物线，关于 $x = a$ 对称，在 $x = a$ 取最小值 -1，零点为 $x = a \pm 1$。由此读出倒数的性质：

- 曲线关于 $x = a$ 对称，垂直渐近线为 $x = a \pm 1$。
- 当 $|x-a| < 1$ 时，$-1 \le D < 0$，所以 $f \le -1$，等号只在 $x = a$ 成立。因此 $(a, -1)$ 是局部极大点（local maximum），而当 x 从内侧趋近 $a \pm 1$ 时，$f \to -\infty$。
- 当 $|x-a| > 1$ 时，$D > 0$，且 D 随 $|x-a|$ 增大而递增，所以 f 为正，并由 $+\infty$（在渐近线旁）递减趋向 0。x 轴是水平渐近线（horizontal asymptote），当 $|x|$ 很大时 $f \approx 1/x^2$。

事实上 $f'(x) = -2(x-a)/D^2$ 只在 $x = a$ 处为零。曲线与 y 轴相交于 $1/(a^2-1)$（当 $a \neq \pm 1$ 时），但其位置取决于 a，所以我们以 $x = a$ 为参照来作图。



第 (ii) 部分

设 $p=(x-a)^2-1$ 及 $q=(x-b)^2-1$，于是 $g=1/(pq)$。令

$$c=\tfrac{1}{2}(a+b), \qquad d=\tfrac{1}{2}(b-a)>0, \qquad t=x-c,$$

使得 $x-a=t+d$ 及 $x-b=t-d$。利用 $(t+d)(t-d)=t^2-d^2$ 及 $(t+d)^2+(t-d)^2=2t^2+2d^2$，得

$$\begin{aligned} pq &= \big((t+d)^2-1\big)\big((t-d)^2-1\big) \\ &= (t^2-d^2)^2-(2t^2+2d^2)+1. \end{aligned}$$

这只取决于 t^2，所以 g 关于 $x=c$ 对称，即关于 a 与 b 的中点对称。记 $u=t^2$ 及 $h(u)=(u-d^2)^2-2u-2d^2+1$，则

$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}t}=2t\,h'(u)=2t\big(2(u-d^2)-2\big)=4t\,(t^2-d^2-1).$$

由于 $g'=-(pq)'/(pq)^2$，g 的驻点就是 $(pq)'=0$ 之处：

$$t=0 \qquad 或 \qquad t=\pm\sqrt{d^2+1},$$

前提是这些点不是渐近线。渐近线位于 $t=\pm(d+1)$ 及 $t=\pm(d-1)$，而由于 $d<\sqrt{d^2+1}<d+1$，外侧的两个驻点必定是真正的驻点。以 a 和 b 表示，候选点为

$$x=\frac{a+b}{2} \qquad 及 \qquad x=\frac{a+b\pm\sqrt{(b-a)^2+4}}{2}.$$

在这些点上的值为 $h(0)=(d^2-1)^2$ 及 $h(d^2+1)=1-2(d^2+1)-2d^2+1=-4d^2$。

? **想一想** 这些候选点中哪些真正成立？它们是极大点还是极小点？

这取决于 $t=0$ 是否与渐近线重合，即是否有 $d=1$；这正好对应 $b>a+2$（即 $d>1$）与 $b=a+2$（即 $d=1$）两种情况的区分。至于每个点的性质，我们不再求二阶导数，而是观察 g 在渐近线之间每个区间上的正负号，以及它在区间两端的行为。

情况 $b > a+2$。此时 $d > 1$，四条渐近线依次为

$$t = -(d+1),\ -(d-1),\ d-1,\ d+1, \quad \text{即} \quad x = a-1,\ a+1,\ b-1,\ b+1,$$

四者互不相同，且 c 严格位于 $a+1$ 与 $b-1$ 之间。

- 外侧，$|t| > d+1$：此处 $|x-a| > 1$ 且 $|x-b| > 1$，所以 $p, q > 0$，$g > 0$。这里没有驻点，所以 g 由渐近线处的 $+\infty$ 下降至无穷远处的 0，行为类似 $1/x^4$。
- 中间，$|t| < d-1$，即 $a+1 < x < b-1$：同样 $p, q > 0$，所以 $g > 0$，且在两端 $g \to +\infty$。唯一的驻点是 $t = 0$，因此它必定是极小点，其值为

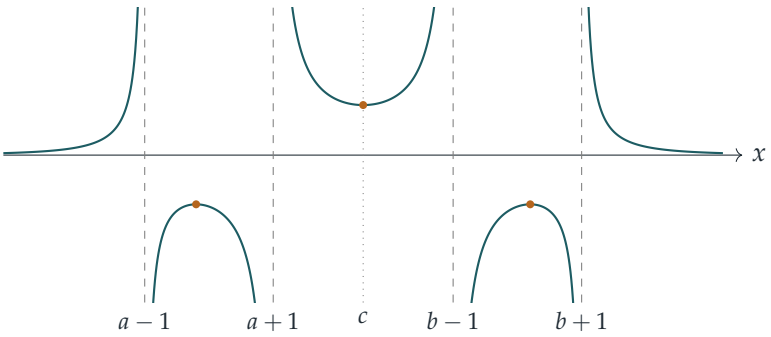
$$g(c) = \frac{1}{(d^2-1)^2} = \frac{16}{\big((b-a)^2-4\big)^2}.$$

- 两个间隙，$d-1 < |t| < d+1$：对于 $(d-1, d+1)$ 中的 t，有 $|x-b| < 1$，但 $x - a > 2d - 1 > 1$，所以 $q < 0 < p$，$g < 0$，且在两端 $g \to -\infty$。该处唯一的驻点是 $t = \sqrt{d^2+1}$，它必定是极大点，其值为

$$g = \frac{1}{-4d^2} = -\frac{1}{(b-a)^2}.$$

  间隙 $-(d+1) < t < -(d-1)$ 的情况与此成镜像。

因此共有三个驻点：在 $x = \frac{1}{2}(a+b)$ 的一个局部极小点，以及在 $x = \frac{1}{2}\big(a+b \pm \sqrt{(b-a)^2+4}\big)$ 的两个局部极大点，两者均有 $y = -1/(b-a)^2$。下图取 $b-a = 4.8$，并把 y 方向拉伸，使转向点清楚可见。



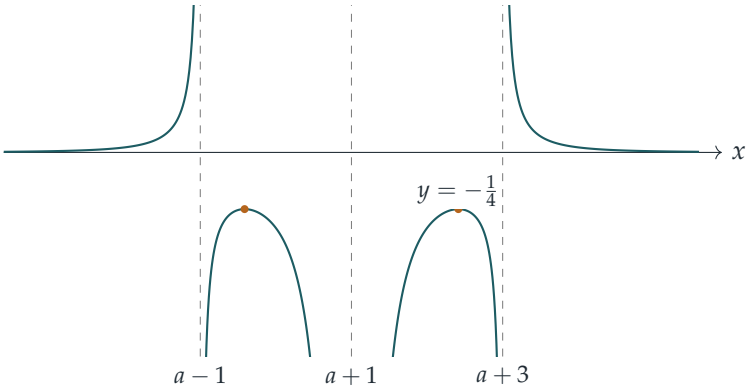
情况 $b = a+2$。此时 $d = 1$，所以 $a+1 = b-1 = c$，中间两条渐近线合而为一，位于 $x = a+1$。设 $t = x-a-1$，

$$pq = h(t^2) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2-4), \qquad g = \frac{1}{t^2(t^2-4)},$$

所以共有三条渐近线：$x = a-1$、$a+1$、$a+3$。候选点 $t = 0$ 现在是渐近线，而不是驻点，只剩下 $t = \pm\sqrt{2}$。

- 当 $|t| > 2$ 时，$g > 0$，且 g 由 $+\infty$ 下降至 0，与前相同。
- 当 $0 < |t| < 2$ 时，$g < 0$，且无论 $t \to 0$（此处 $g \approx -1/(4t^2)$，所以两侧都向下）还是 $|t| \to 2$，都有 $g \to -\infty$。因此在 $t = \sqrt{2}$ 的驻点是极大点，其值为 $g = 1/\big(2 \cdot (-2)\big) = -\frac{1}{4}$；在 $t = -\sqrt{2}$ 亦然。

因此驻点位于 $x = a + 1 \pm \sqrt{2}$，两者都是局部极大点，且 $y = -\frac{1}{4}$。（这与一般公式吻合：当 $b - a = 2$ 时，公式给出 $x = \frac{1}{2}(2a + 2 \pm \sqrt{8})$，以及 $-1/(b-a)^2 = -\frac{1}{4}$。）此时曲线在 $x = a - 1$ 与 $x = a + 3$ 之间从不升到 x 轴以上。



验算

- 取 $a = 0$、$b = 5$：$g(2.5) = 1/\big((6.25 - 1)^2\big) = 1/27.5625$，而公式 $16/(25 - 4)^2 = 16/441$ 给出相同结果，约为 0.0363。在 $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{29}) \approx 5.193$，直接代入计算得 $g \approx -0.04 = -1/25$。
- 在第一种情况中令 $b \to a + 2$，极小值 $16/\big((b-a)^2 - 4\big)^2$ 趋向无穷大，与中间那一支消失于合并后的渐近线的情况相符。
- 对随机的 a 和 b 以数值方法扫描 g' 的变号位置，发现当 $b > a + 2$ 时恰有三个驻点，当 $b = a + 2$ 时恰有两个，位置与上文一致。

常见错误

- 把 pq 展开成关于 x 的四次多项式（quartic），再尝试直接把三次式 $(pq)'$ 因式分解（factorise）：这样做行得通，但对称代换（substitution）$t = x - c$ 能令因式分解一目了然。
- 忘记在 $b = a + 2$ 的情况中，点 $x = a + 1$ 是渐近线（分母的二重零点），而不是转向点。

► 弄错 g 在间隙中的正负号：在该处 p、q 中恰有一个为负，所以 $g < 0$。

STEP 之外

由 D 描绘 $1/D$ 的图像，是定性地思考函数的初步体验：正负号、零点、对称性及在无穷远处的行为，在动用任何微积分之前已几乎告诉你一切。平移 $t = x - \frac{1}{2}(a+b)$ 是利用对称性把四次式化为关于 t^2 的二次式，这个技巧在代数和分析中反复出现。若想了解这类作图背后对极限和渐近线的严谨处理，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；若想做更多同类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。