详细解答

STEP II 2012，第 4 题

纯数学 · 对数级数不等式

STEP II 2012，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q4

关键思路

一切都源自 $\ln(1+x)$ 的级数（series），以及 e^t 是递增函数（increasing function）这个事实。要比较 $(1+\frac{1}{n})^n$ 与 e，可以先取对数（logarithm）：我们需要比较 $n\ln(1+\frac{1}{n})$ 与 1。一个各项逐渐缩小的交错级数（alternating series）可以两项两项地加上括号，从而证明它小于首项；而组合 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 则把所有负项都消去，所以它大于首项。把数列夹在这两个界之间，便得出极限（limit）。

解答

第 (i) 部分

由于 $n>1$ 且 $k\geq 1$，我们有 $(k+1)n>n>1$，当然亦有 $(k+1)n>k$。两边乘以 $n^k>0$，得

$$(k+1)n^{k+1}>kn^k>0,$$

对这些正数取倒数（reciprocal），不等号方向会反转：

$$\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}<\frac{1}{kn^k}.$$

现在在级数中代入 $x=\frac{1}{n}$；这是容许的，因为 $n>1$ 给出 $0<x<1$。把首项之后的各项两两分组，

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)-\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}\right)-\cdots.$$

每个括号都具有 $\frac{1}{kn^k}-\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$ 的形式，其中 k 为偶数，因此由刚才证明的不等式可知它严格为正。

想一想 我们可以这样为一个无穷级数加上括号吗?

可以，因为这个级数收敛（converges）。项数为奇数的部分和（partial sums）构成全体部分和的一个子数列（subsequence），所以它们趋向同一个极限，即 $\ln(1+\frac{1}{n})$。加上括号后的级数，正正就是这些奇数项部分和组成的数列。

加括号后级数的部分和为 $\frac{1}{n}-b_1$、$\frac{1}{n}-b_1-b_2$、...，其中每个 $b_j>0$。它们递减，所以全部都不大于 $\frac{1}{n}-b_1$，因此它们的极限亦然:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}-b_1<\frac{1}{n},\qquad b_1=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}>0.$$

（把 b_1 单独留出来，正是令最后的不等式成为严格不等式（strict inequality）的关键；否则一列小于 $\frac{1}{n}$ 的数，其极限有可能等于 $\frac{1}{n}$。）

两边乘以 $n>0$，得 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1$，即 $\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)<1$。由于指数函数（exponential function）是递增的，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

第 (ii) 部分

设 $x=\frac{1}{2y}$。由于 $y>\frac{1}{2}$，我们有 $0<x<1$，所以 x 与 $-x$ 都落在级数成立的范围内:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots.$$

逐项相减（对两个收敛级数而言这是合理的），偶次幂互相抵消，奇次幂则加倍:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

而

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2y}}{1-\frac{1}{2y}}=\frac{2y+1}{2y-1},$$

所以，利用 $2x=\frac{1}{y}$，

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)=\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}+\frac{2}{5(2y)^5}+\cdots=\frac{1}{y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2y)^{2r}}.$$

首项之后的每一项都严格为正（因为 $y>0$），所以由第二个起的部分和全部都不小于 $\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}$，因此

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)\ge\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}>\frac{1}{y},$$

此即所求。

至于推论，选取 y 使分数变成 $1+\frac{1}{n}$。取 $y=n+\frac{1}{2}$（对每个正整数 n，它都大于 $\frac{1}{2}$），

$$\frac{2y+1}{2y-1}=\frac{2n+2}{2n}=1+\frac{1}{n},$$

所以

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

两边乘以 $n+\frac{1}{2}>0$，得 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n})>1$，再取指数（同样是递增函数），

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

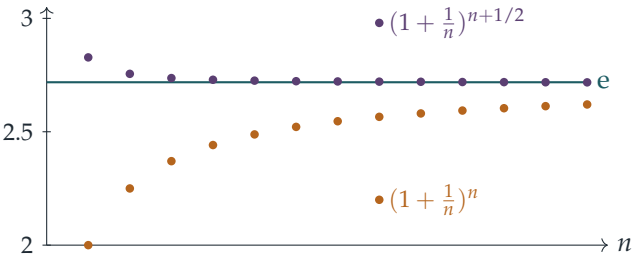
第 (iii) 部分

把第 (ii) 部分的结果除以 $(1+\frac{1}{n})^{1/2}>0$，并与第 (i) 部分结合，对每个整数 $n\geq 2$ 都有

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$1+\frac{1}{n}\to 1$，所以 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$（平方根函数是连续（continuous）的），于是左边趋向 e。右边是常数 e。由夹逼定理（squeeze／sandwich theorem），

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to\mathrm{e}.$$



验算

当 $n=10$：$(1.1)^{10}\approx 2.5937$，$(1.1)^{10.5}\approx 2.7203$，两者确实分处 $\mathrm{e}\approx 2.7183$ 的两侧。当 $n=1000$，下界 $\mathrm{e}/\sqrt{1.001}\approx 2.7169237$ 仅仅略低于 $(1.001)^{1000}\approx 2.7169239$，可见这个夹逼有多紧。我们亦对直至数千的每个 n 验证了两条严格不等式，并以数值方法验证了对随机选取的 $y>\frac{1}{2}$，第 (ii) 部分的级数之和等于 $\ln\frac{2y+1}{2y-1}$。

常见错误

- 在第 (i) 部分代入 $x = 1$：题目只给出 $|x| < 1$ 时的级数，这正是那里需要 $n > 1$ 的原因（第 (iii) 部分只用到很大的 n，所以并无损失）。
- 直接由一列严格不等式的极限得出严格不等式。极限只保持 $\leq$；要得到 $<$，须把一个正项单独留出来。
- 忘记取指数之所以保持不等式，只是因为 e^t 是递增的；应当明确写出这一点。

STEP 之外

这些界所显示的不止于极限：由于 $(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}/(1+\frac{1}{n})^n = \sqrt{1+1/n} \approx 1 + \frac{1}{2n}$，误差 $\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n$ 的大小约为 $\mathrm{e}/(2n)$，所以这个数列收敛得颇慢。重排收敛级数、比较部分和以及夹逼定理，都是大学第一门分析（analysis）课程的基本功；在那里你亦会遇到其中的微妙之处（重排条件收敛（conditionally convergent）级数可以改变其和！）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对这一切有精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。