详细解答

STEP II 2012，第 3 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2012，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q3

关键思路

$x+\sqrt{1+x^2}$ 这个麻烦的式子，明显应该设为 t。令这个代换（substitution）奏效的关键，在于它的倒数（reciprocal）是 $\sqrt{1+x^2}-x$，因此把 t 与 $1/t$ 相减和相加，便可把 x 与 $\sqrt{1+x^2}$ 都写成 t 的简单函数（function）。之后，两个积分（integral）各自的重点，就是看出如何把被积函数（integrand）写成只含 $x+\sqrt{1+x^2}$ 的函数。

解答

恒等式

设 $t=x+\sqrt{1+x^2}$。乘以共轭式（conjugate），得

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

把这两条方程相减及相加，得

$$x=\tfrac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\qquad \sqrt{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

第一条式直接把 x 表示为 t 的函数，因此

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

至于积分上下限：当 $x=0$ 时，$t=1$；而当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$。此外，t 是 x 的严格递增函数（strictly increasing function）（当 $x\geq 0$ 时，x 与 $\sqrt{1+x^2}$ 皆递增），所以这个代换在 $[0,\infty)$ 上是一一对应（one-to-one）的。因此

$$\int_0^\infty f(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^\infty\left(1+\frac{1}{t^2}\right)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

得证。

第一个积分

> **想一想** 分母 $2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$ 怎样才能写成 $x+\sqrt{1+x^2}$ 的函数?

试试平方：$(x+\sqrt{1+x^2})^2 = x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2) = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$，恰好就是分母。因此被积函数是 $f(x+\sqrt{1+x^2})$，其中 $f(t)=1/t^2$，由恒等式得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-2}+t^{-4})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}\Big]_1^\infty = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}\Big) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

第二个积分

设 $x=\tan\theta$，则 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，即 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$。当 θ 由 0 变到 $\frac{1}{2}\pi$ 时，x 由 0 变到 ∞。由于 $0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$，故 $\cos\theta>0$，所以 $\sec\theta=\sqrt{1+x^2}$，且

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad 1+\sin\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+x^2}},$$

其中同样有 $t=x+\sqrt{1+x^2}$。因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{t^3}\,\mathrm{d}x.$$

> **想一想** 被积函数中仍有一个 $\sqrt{1+x^2}$。怎样把它写成 t 的式子?

我们在第一部分已经求得：$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$。所以被积函数是

$$\frac{t+t^{-1}}{2t^3} = \tfrac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4}),$$

只是 $t=x+\sqrt{1+x^2}$ 的函数。取 $f(t)=\frac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4})$ 应用恒等式，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\Big)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^\infty (t^{-2}+2t^{-4}+t^{-6})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{15} = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

验算

- 用一个简单的 f 测试恒等式：取 $f(t)=1/t^3$，右方为 $\frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3}+t^{-5})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\big) = \frac{3}{8}$，而用数值求积（numerical quadrature）计算左方，同样得 0.375。

- 用辛普森法则（Simpson's rule）计算原来的两个积分，得 0.666667 及 0.466667，与 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{7}{15}$ 吻合。
- 数量级的合理性检查：在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上，被积函数 $1/(1+\sin\theta)^3$ 由 1 降至 $\frac{1}{8}$，所以积分值介乎 $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx 0.20$ 与 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ 之间。$\frac{7}{15} \approx 0.47$ 稳稳落在这个范围内。

常见错误

- 先求 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$，再费力地把它化成 t 的式子。先把 x 写成 t 的函数，然后对它求导，会快得多。
- 在第二个积分中，漏掉了来自 $\mathrm{d}\theta$ 的因子 $1/(1+x^2)$，或者把 $\sqrt{1+x^2}$ 留在被积函数中，而没有把它化成 $\frac{1}{2}(t+1/t)$。

STEP 之外

代换 $t = x+\sqrt{1+x^2}$ 其实就是在 $x=\sinh u$ 时的 $t=\mathrm{e}^u$：事实上 $\sinh^{-1}x = \ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$，而公式 $x=\frac{1}{2}(t-1/t)$、$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$ 不过是用指数写出的 $\sinh u$ 与 $\cosh u$。这类双曲代换（hyperbolic substitution）是大学一年级处理含 $\sqrt{1+x^2}$ 的积分的标准工具。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题》）收录了更多同类风格的 STEP 积分题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。