详细解答

STEP II 2012，第 2 题

纯数学 · 多项式的复合

STEP II 2012，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q2

关键思路

在复合（composition）之下，次数（degree）会相乘，所以把 p 迭代几次，次数很快就大得无法与右方相配。比较次数就能确定 p 的次数；之后把 p 写成带未知系数（coefficient）的形式，每一部分都只剩下一小段代数运算。第 (ii) 部分有一条巧妙的捷径：$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 本身就是一个关于 $\mathrm{p}(x)$ 的二次式，因此整个左方是 $\mathrm{p}(x)$ 的二次式，用配方法（completing the square）便可完成。

解答

复合函数的次数

设 $\mathrm{p}(x) = a_m x^m + \ldots$ 及 $\mathrm{q}(x) = b_n x^n + \ldots$，其中 $a_m, b_n \neq 0$。在 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = a_m[\mathrm{q}(x)]^m + a_{m-1}[\mathrm{q}(x)]^{m-1} + \ldots$ 中，项 $a_m[\mathrm{q}(x)]^m$ 的次数为 mn，首项系数为 $a_m b_n^m \neq 0$，而其余每一项的次数至多为 $(m-1)n < mn$（当 $n \geq 1$ 时）。所以没有任何项能抵消最高次项，故

$$\deg \mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = mn.$$

（若 $n = 0$，则 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x))$ 是常数，而 $mn = 0$ 亦同样成立。）

第 (i) 部分

设 p 的次数为 m。

若 $m \geq 2$，则由上述结果，$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)))$ 的次数为 m^3，而 $3\mathrm{p}(x)$ 的次数为 $m < m^3$。所以左方的次数为 $m^3 \geq 8$，但右方 $-2x$ 的次数为 1。这是不可能的。

若 $m = 0$，则对某常数 c 有 $\mathrm{p}(x) = c$，左方是常数 $c - 3c = -2c$，不可能对所有 x 都等

于 $-2x$。这也是不可能的。

所以 $m = 1$。设 $\mathrm{p}(x) = ax + b$，其中 $a \neq 0$。于是

$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b,$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

而方程变为

$$(a^3 - 3a)x + (a^2 + a + 1 - 3)b = -2x \quad \text{对所有} x.$$

两个多项式（polynomial）对所有 x 都相等，当且仅当它们的系数相等，所以

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \qquad \text{及} \qquad (a^2 + a - 2)\, b = 0.$$

由于 $a = 1$ 是第一式的根，它可因式分解为 $(a - 1)^2(a + 2) = 0$，得 $a = 1$ 或 $a = -2$。第二个条件是 $(a - 1)(a + 2)b = 0$，对这两个值都自动成立，不论 b 是甚么。因此解恰好是

$$\mathrm{p}(x) = x + b \qquad \text{及} \qquad \mathrm{p}(x) = -2x + b, \qquad b \text{ 为任意常数.}$$

验算第二族：$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 4x - b$ 及 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = -8x + 3b$，所以左方为 $-8x + 3b + 6x - 3b = -2x$。

第 (ii) 部分

设 p 的次数为 m。左方三项的次数分别为 m^2、$2m$ 及 m。

- 若 $m \geq 3$，则 $m^2 > 2m > m$，所以左方的次数为 $m^2 \geq 9 \neq 4$。
- 若 $m = 1$，左方的次数至多为 2；若 $m = 0$，左方是常数。两者都不可能等于 x^4。

所以 $m = 2$。（此时 $m^2 = 2m = 4$，故 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 与 $3[\mathrm{p}(x)]^2$ 的最高次项次数相同，我们必须检查它们的系数。）

设 $\mathrm{p}(x) = ax^2 + bx + c$，其中 $a \neq 0$；为了少写一点，以 P 代表 $\mathrm{p}(x)$。

> **想一想** 我们真的要把 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 完全展开吗?

不必。按定义 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = aP^2 + bP + c$，所以左方为

$$2(aP^2 + bP + c) + 3P^2 - 4P = (2a + 3)P^2 + (2b - 4)P + 2c,$$

这是 P 的二次式。它的 x^4 系数是 $(2a + 3)a^2$，因为 P^2 的首项（leading term）是 a^2x^4，而 P 的次数只有 2。与 x^4 比较，得

$$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0, \qquad \text{即} \qquad (a + 1)^2(2a - 1) = 0,$$

（看出根 $a=-1$ 后再作除法），所以 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{2}$。

现在我们用一个简单的事实：若 $S(x)$ 是多项式，且对某常数 K 有 $S(x)^2=x^4+K$，则 $(S-x^2)(S+x^2)=K$。当 S 的首项为 $\pm x^2$ 时，若两个因式都不是零多项式，则至少其中一个的次数为 2，乘积便不可能是常数。所以对首项为 $\pm x^2$ 的 S，必有一个因式为零，即恰好 $S=\pm x^2$。

情况 $a=-1$。此时 $2a+3=1$，配方得

$$P^2+(2b-4)P+2c=\big(P+b-2\big)^2-(b-2)^2+2c=x^4.$$

所以 $S=P+b-2=-x^2+bx+(c+b-2)$ 满足 $S^2=x^4+K$，其中 K 为常数，且首项为 $-x^2$。于是 $S+x^2=bx+(c+b-2)$ 的次数小于 2，而 $S-x^2$ 的次数为 2，所以上述事实迫使 $S+x^2=0$：即 $b=0$ 及 $c+b-2=0$。所以 $b=0$、$c=2$，于是 $K=(b-2)^2-2c=0$，前后一致。这给出

$$\mathrm{p}(x)=2-x^2.$$

情况 $a=\frac{1}{2}$。此时 $2a+3=4$，而

$$4P^2+(2b-4)P+2c=\left(2P+\tfrac{b-2}{2}\right)^2-\tfrac{(b-2)^2}{4}+2c=x^4.$$

现在 $S=2P+\frac{b-2}{2}=x^2+2bx+2c+\frac{b-2}{2}$ 的首项为 x^2，所以同理 $S-x^2=0$：$b=0$ 及 $2c-1=0$。所以 $b=0$、$c=\frac{1}{2}$，而 $K=\frac{(b-2)^2}{4}-2c=1-1=0$，前后一致。这给出

$$\mathrm{p}(x)=\tfrac{1}{2}(x^2+1).$$

由于每一步都可以逆推，两者确实都是解，但直接验算一下会更安心。对 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$，$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=2-(2-x^2)^2=-x^4+4x^2-2$，而

$$2(-x^4+4x^2-2)+3(x^4-4x^2+4)-4(2-x^2)=x^4.$$

对 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$，设 $u=x^2+1$；则 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=\frac{1}{4}u^2+1$，而左方为 $\frac{1}{4}u^2+1+\frac{3}{4}u^2-2u=(u-1)^2=x^4$。

所以满足 (ii) 中方程的多项式恰好是 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$ 及 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$。

验算

- 在 (i) 中试 $b=1$：$\mathrm{p}(x)=x+1$ 给出 $(x+3)-3(x+1)=-2x$。
- 在 (ii) 中代入 $x=1$:对 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$,得 $\mathrm{p}(1)=1$、$\mathrm{p}(\mathrm{p}(1))=1$,而 $2+3-4=1=1^4$。对 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$，取 $x=3$：$\mathrm{p}(3)=5$、$\mathrm{p}(5)=13$，而 $26+75-20=81=3^4$。
- 我们亦用精确运算验证了 (i) 中两族解对许多随机的 b 都成立，并在一个以 $\frac{1}{4}$ 为步长取 b,c 的二次式网格上搜索，结果只找到 (ii) 的两个解。

常见错误

- 在 (ii) 中假设左方的次数就是 m^2：当 $m = 2$ 时，$2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 与 $3[\mathrm{p}(x)]^2$ 两项的次数都是 4，正正因为它们有可能互相抵消，所以 a 必须由 $2a^3 + 3a^2 = 1$ 求得。
- 在 (i) 中解释为何次数必须是 1 时，漏掉 $m = 0$ 的情况。
- 在 (i) 中求得 $a = 1$ 或 $a = -2$ 后便停下，并把 b 定为某个特定值：常数项的条件对每个 b 都成立。

STEP 之外

法则 $\deg(\mathrm{p} \circ \mathrm{q}) = \deg \mathrm{p} \cdot \deg \mathrm{q}$，与 $\deg(\mathrm{pq}) = \deg \mathrm{p} + \deg \mathrm{q}$ 一样，依赖于系数之间没有零因子（zero divisors）：在一个两个非零数相乘可以得零的环（ring）中，首项可能消失，这两条法则都会失效。像 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = \ldots$ 这样的函数方程（functional equation）亦会引向迭代映射（iterated maps）与动力系统（dynamics）的研究。关于多项式环以及次数论证何时适用，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。