详细解答

STEP II 2012，第 13 题

概率与统计 • 泊松过程的最近距离

STEP II 2012，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q13

本题在 *Beyond STEP* 第 12.19 节平面上的随机点中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/spatial-poisson.html

关键思路

“最近的超级市场距离至少为 y”这件事，恰好等同于“以我们所在点为圆心、半径为 y 的圆内没有任何超级市场”，而泊松模型（Poisson model）直接给出这件事的概率。由此得到 Y 的累积分布函数（cumulative distribution function），再求导便得到概率密度函数（probability density function）。之后各阶矩（moments）都是高斯（Gauss）型积分（Gaussian-type integrals）：一次分部积分法（integration by parts）就能把 $\mathrm{E}(Y)$ 化为题目容许我们假设的积分，而代换（substitution）$u = y^2$ 则使 $\mathrm{E}(Y^2)$ 变得十分初等。

解答

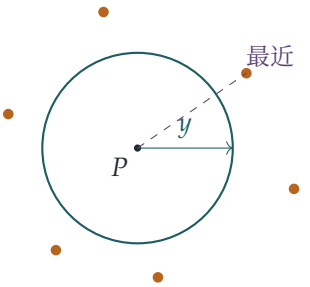
在整个解答中，我们把区域视为足够大，可以忽略边界效应（edge effects），因此对所有相关的 y，以所选点为圆心、半径为 y 的圆都位于区域之内。

圆内没有超级市场

设 N 为半径为 y 的圆内超级市场的数目。该圆的面积为 πy^2，所以 $N \sim \mathrm{Po}(\pi k y^2)$，并且

$$\mathrm{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

Y 的分布



设 P 为随机选取的点。最近的超级市场与 P 的距离至少为 y，当且仅当以 P 为圆心、半径为 y 的开圆内没有超级市场。因此，对 $y \geq 0$，

$$\mathrm{P}(Y \geq y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}, \qquad \text{因此} \qquad \mathrm{P}(Y < y) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

（由于 Y 是连续随机变量（random variable），写 $<$ 还是 $\leq$ 并无分别。）这就是 Y 的累积分布函数 $F(y)$；而当 $y < 0$ 时 $F(y) = 0$，因为距离不可能是负数。对 $y \geq 0$ 求导，

$$f(y) = F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right) = 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2},$$

这正是所求的概率密度函数。简单验证一下：当 $y \to \infty$ 时 $F(y) \to 1$，所以 f 的积分等于 1。

期望值

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty y \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y.$$

想一想 指数函数前面有一个 y^2，我们怎样才能利用题目给出的积分？

把被积函数拆成 $y \times \left(2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right)$：第二个因子正是 $-\mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ 的导数。取 $u = y$ 进行分部积分，

$$\mathrm{E}(Y) = \left[-y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y,$$

因为当 $y \to \infty$ 时 $y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2} \to 0$（指数函数占上风），而且它在 $y = 0$ 时等于零。现在把指数配成 $-\frac{1}{2}x^2$：设 $\pi k y^2 = \frac{1}{2}x^2$，即 $y = x/\sqrt{2\pi k}$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sqrt{2\pi k}$。积分上下限仍然是 0 和 ∞，所以

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

方差

计算 $\mathrm{E}(Y^2)$ 时完全不需要题目给出的积分，因为 y 的奇次幂让我们可以代换 $u = \pi k y^2$，$\mathrm{d}u = 2\pi k y\,\mathrm{d}y$：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{u}{\pi k}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k}\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k},$$

这里用到 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$（可用分部积分求得，或者认出它是参数为 1 的指数分布（exponential distribution）的期望值）。因此

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4-\pi}{4\pi k},$$

正如所求。

验算

- *标度*。若超级市场的密度变为 k 倍，长度应缩小 $\sqrt{k}$ 倍，所以 $\mathrm{E}(Y) \propto k^{-1/2}$，而 $\mathrm{Var}(Y) \propto k^{-1}$。两个答案都符合这个形式。
- *正值*。$4 - \pi > 0$，所以方差是正数，理应如此。
- *数值*。取 $k = 1$，对概率密度函数作中点求积法（midpoint quadrature）得出 $\mathrm{E}(Y) = 0.5000$ 及 $\mathrm{Var}(Y) = 0.06831$，与 $(4-\pi)/(4\pi) \approx 0.06831$ 吻合。对某点周围超级市场的泊松随机散布进行 10^5 次模拟，得出平均值 0.4996 及方差 0.0681。

常见错误

- 写成 $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$：这其实是距离 y 以内*没有*超级市场的概率，即 $\mathrm{P}(Y \geq y)$。
- 代换时用了 $x = \sqrt{\pi k}\,y$ 而不是 $x = \sqrt{2\pi k}\,y$，结果得到 e^{-x^2} 而非题目假设的 $\mathrm{e}^{-x^2/2}$，答案相差 $\sqrt{2}$ 倍。

STEP 之外

这里的超级市场构成平面上的一个*泊松点过程*（Poisson point process），这是“完全空间随机性”（complete spatial randomness）的基本模型，可用于描述森林中的树木、天上的星星以及流动电话发射站。Y 的分布是*瑞利分布*（Rayleigh distribution），它也是两个分量均为独立正态随机变量的向量之长度所服从的分布；而我们的分部积分所揭示的简洁尾部公式 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y \geq y)\,\mathrm{d}y$，对任何非负随机变量都成立。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）涵盖了泊松过程以及这些尾部积分的概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。