详细解答

STEP II 2012，第 12 题

概率与统计 • 条件概率

STEP II 2012，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q12

关键思路

按一下开关会把它*切换*（toggle），所以泳池在走廊的开关最终处于“开”，要么是它本来就开着而没有被按，要么是它本来关着而被按了一下。厨房那一半其实是障眼法（red herring）：一个以概率 $\frac{1}{2}$ 处于“开”的开关，无论有没有被切换，仍然以概率 $\frac{1}{2}$ 处于“开”。第 (i) 部分得出一个条件概率（conditional probability）之后，七个星期一就构成一个二项（binomial）试验，而“最可能的值是 3”就转化为相邻二项概率之间的一对不等式。

解答

第 (i) 部分

定义以下事件（events）：

- H：客人按了走廊中泳池的开关，故 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{4}$；
- A：走廊的开关一开始全部处于“开”，故 $\mathrm{P}(A) = p$；
- L：最终泳池的灯亮着。

客人是随机选择开关的，所以 H 与 A 互相独立（independent）。

走廊。按过开关之后，泳池在走廊的开关处于“开”，当且仅当 A 发生而 H 不发生（它本来开着而没有被碰），或 A 不发生而 H 发生（它本来关着而被切换成开）。所以

$$\mathrm{P}(\text{走廊的泳池开关最终为开}) = p \cdot \tfrac{3}{4} + (1-p) \cdot \tfrac{1}{4} = \frac{1+2p}{4}.$$

厨房。泳池在厨房的开关一开始以概率 $\frac{1}{2}$ 处于“开”。若它没有被按，它保持原状；若它

被按，它就翻转，而一个以概率 $\frac{1}{2}$ 处于“关”的开关翻转后以概率 $\frac{1}{2}$ 处于“开”。无论客人在厨房做甚么，它最终处于“开”的概率都是 $\frac{1}{2}$。

厨房的开关以及客人在厨房的选择，与走廊的一切都互相独立，所以

$$\mathrm{P}(L) = \frac{1+2p}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+2p}{8}.$$

至于条件概率，$H \cap L$ 要求客人按了泳池在走廊的开关、该开关原本处于“关”（这样按下去才会变成“开”），以及厨房的开关最终处于“开”：

$$\mathrm{P}(H \cap L) = \frac{1}{4} \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-p}{8}.$$

因此

$$\mathrm{P}(H \mid L) = \frac{(1-p)/8}{(1+2p)/8} = \frac{1-p}{1+2p},$$

得证。

第 (ii) 部分

记 $q = \dfrac{1-p}{1+2p}$。每个星期一我们都已知灯是亮着的，所以由第 (i) 部分，泳池在走廊的开关被按的概率是 q，而且每星期之间互相独立（客人各自独立行事，而每个星期一的初始状态都是重新产生的）。所以开关被按的日数 X 满足

$$X \sim \mathrm{B}(7, q).$$

我们也需要 $1-q$：

$$1 - q = \frac{(1+2p)-(1-p)}{1+2p} = \frac{3p}{1+2p}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}.$$

（这里 $p > 0$；若 $p = 0$，则 $q = 1$，而 $X = 7$ 必然成立，所以 3 不可能是最可能的值。）

> **想一想** 怎样把“3 是最可能的值”变成可以计算的东西?

比较相邻的概率。对于 $1 \le k \le 7$,

$$\frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k-1)} = \frac{\binom{7}{k} q^k (1-q)^{7-k}}{\binom{7}{k-1} q^{k-1} (1-q)^{8-k}} = \frac{8-k}{k} \cdot \frac{q}{1-q}.$$

因子 $\frac{8-k}{k}$ 随 k 增大而严格递减，所以当这个比值大于 1 时概率上升，一旦比值小于 1 概率便下降。因此 3 是（唯一的）最可能值，当且仅当概率由 $k=2$ 到 $k=3$ 上升，并由 $k=3$ 到 $k=4$ 下降：

$$\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{q}{1-q} > 1 \qquad \text{及} \qquad \frac{\mathrm{P}(X=4)}{\mathrm{P}(X=3)} = \frac{4}{4} \cdot \frac{q}{1-q} < 1.$$

（单凭这两个条件已足够证明我们需要的方向：若 3 是最可能的值，则必然有 $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=2)$ 及 $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=4)$。）

代入 $\frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}$，并在两边乘以正数 $3p$：

- 第二个条件给出 $1-p < 3p$，即 $p > \frac{1}{4}$；
- 第一个条件给出 $\frac{5}{3}(1-p) > 3p$，即 $5-5p > 9p$，所以 $p < \frac{5}{14}$。

因此 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$，得证。

验算

- 当 $p=0$ 时，走廊的开关全部处于“关”，所以灯要亮，泳池的开关就必须被按过：第 (i) 部分给出 $\mathrm{P}(H \mid L) = 1$，正如所料。当 $p=1$ 时，灯要亮，该开关就必须没有被按，而公式给出 0。
- 两个端点分别对应 $q=\frac{1}{2}$（在 $p=\frac{1}{4}$）及 $q=\frac{3}{8}$（在 $p=\frac{5}{14}$）。当 $q=\frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{B}(7,\frac{1}{2})$ 是对称的，所以 3 与 4 打和；当 $q=\frac{3}{8}$ 时，$(n+1)q=3$，2 与 3 打和。所以严格不等式恰到好处。
- 我们以分数精确地列举所有初始状态及所有开关选择，验证了第 (i) 部分；又以步长 $\frac{1}{2800}$ 的网格取 p 值，计算 $\mathrm{B}(7,q)$ 的概率，验证了第 (ii) 部分：唯一的众数（mode）是 3，当且仅当 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$。

常见错误

- 忘记按一个已经处于“开”的开关会把它关掉：走廊的计算需要考虑通往“开”的两条途径。
- 明明答案就是 $\frac{1}{2}$，却把厨房分情况计算；分情况讨论虽然无害，却很容易出现算术错误。
- 在第 (ii) 部分用 p 而不是 q 作为二项分布的参数：正是“已知灯亮着”这个条件，把按该开关的概率由 $\frac{1}{4}$ 改变为 q。

STEP 之外

第 (i) 部分正是贝叶斯定理（Bayes' theorem）的实际应用：一个观察结果（灯亮着）把客人按了该开关的概率由 $\frac{1}{4}$ 更新为 $\frac{1-p}{1+2p}$。第 (ii) 部分则把这个想法倒过来运用，问未知参数 p 取甚么值时，才会与给定的最可能结果相符，这正是统计推断（statistical inference）

和最大似然估计（maximum likelihood estimation）的萌芽。用相邻项之比来找出众数的技巧，适用于许多离散分布（泊松分布（Poisson）、超几何分布（hypergeometric））。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）对条件概率及这些分布有详尽的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。