详细解答

STEP II 2012，第 11 题

力学 · 非弹性碰撞

STEP II 2012，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

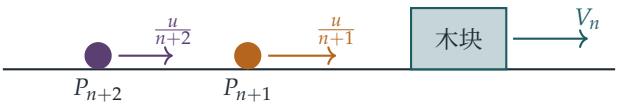
step.maths.org/questions/12-s2-q11

关键思路

留意每粒粒子所带的动量（momentum）：质量 im 乘以速率 u/i 等于 mu，每粒粒子都一样。因此吸收了 n 粒粒子之后，木块的动量就是 nmu，而动量守恒（conservation of momentum）立即给出它的速率。下一粒粒子会否到达，就只是比较两个速率；而能量损失则是“进入的动能减去最终的动能”。

解答

我们把木块和各粒子视为在光滑表面上沿同一直线运动的质点，因此没有水平方向的外力作用，每次碰撞中沿该直线的动量都守恒。由于粒子嵌入木块，每次碰撞都是完全非弹性碰撞（perfectly inelastic collision）。



第 n 次碰撞后的速率

粒子 P_i 的动量为 $im \cdot \frac{u}{i} = mu$，与 i 无关。

假设第 n 粒粒子与木块相撞。那么粒子 $P_1, \ldots, P_{n-1}$ 必定已在它之前相撞：各粒子按次序射出，而且每粒都比前一粒慢（u/i 递减），所以较后的粒子永远追不上较前的粒子，而任何粒子都不可能不撞上木块而越过它。因此在第 n 次碰撞刚完成时，木块包含了 $P_1, \ldots, P_n$，其质量为

$$km + m(1 + 2 + \cdots + n) = m\left(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right).$$

木块起初静止，而每粒被吸收的粒子带来动量 mu，所以由动量守恒，此时总动量为 nmu。因此第 n 次碰撞后木块的速率 V_n 满足

$$m\Big(k+\tfrac{1}{2}n(n+1)\Big)V_n = nmu \quad\Longrightarrow\quad V_n = \frac{2nu}{2k+n(n+1)},$$

此即所求。

当 $2k = N(N+1)$ 时的碰撞次数

经过 n 次碰撞后，木块以恒定速率 V_n 运动（表面光滑）。位于木块后方的粒子 P_{n+1} 能追上木块，当且仅当它严格地较快：

$$\frac{u}{n+1} > \frac{2nu}{2k+n(n+1)} \iff 2k+n(n+1) > 2n(n+1) \iff 2k > n(n+1),$$

其中我们两边乘以正数 $n+1$ 及 $2k+n(n+1)$。（当 $n=0$ 时，此式为 $2k>0$，这是成立的：P_1 必定会撞上静止的木块。）

> ? **想一想** 一旦有一粒粒子追不上，较后的粒子还有可能撞上木块吗?

不可能。若 P_{n+1} 追不上木块，木块便永远保持速率 $V_n \geq \frac{u}{n+1}$，而之后的每粒粒子都更慢，因为对 $i > n+1$ 有 $\frac{u}{i} < \frac{u}{n+1}$。所以发生碰撞的正好是 $P_1, P_2, \ldots$，直至第一粒追不上的粒子为止。

现在取 $2k = N(N+1)$。P_{n+1} 撞上木块的条件变为 $n(n+1) < N(N+1)$，即 $n < N$，因为 $n(n+1)$ 在 $n \geq 0$ 时严格递增。所以 $P_1, \ldots, P_N$ 全部撞上木块，而 P_{N+1} 则不会：当 $n = N$ 时等号成立，而事实上

$$V_N = \frac{2Nu}{N(N+1)+N(N+1)} = \frac{u}{N+1},$$

恰好等于 P_{N+1} 的速率，因此它与木块之间始终保持固定距离。故此恰好有 N 次碰撞。

损失的动能

只有 $P_1, \ldots, P_N$ 参与碰撞，所以总损失等于这些粒子射出时的动能（kinetic energy）（木块起初静止）减去木块最终的动能。

起初，

$$\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(im)\Big(\frac{u}{i}\Big)^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.$$

最终木块的质量为 $m\big(k+\frac{1}{2}N(N+1)\big) = mN(N+1)$，速率为 $\frac{u}{N+1}$，所以其动能为

$$\tfrac{1}{2}\,mN(N+1)\,\frac{u^2}{(N+1)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2\,\frac{N}{N+1} = \tfrac{1}{2}mu^2\Big(1-\frac{1}{N+1}\Big).$$

相减得

$$\begin{aligned}\text{损失的动能} &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}-1+\frac{1}{N+1}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right)=\tfrac{1}{2}mu^2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n},\end{aligned}$$

此即所求结果。

验算

- $N=1$（$k=1$）：一粒质量为 m、速率为 u 的粒子撞上质量为 m 的木块，得速率 $\frac{1}{2}u$，损失为 $\frac{1}{2}mu^2-\frac{1}{4}mu^2=\frac{1}{4}mu^2$，与 $\frac{1}{2}mu^2\cdot\frac{1}{2}$ 吻合。之后 P_2 的速率同样是 $\frac{1}{2}u$，永远不会到达。
- $N=2$（$k=3$）：公式给出损失 $\frac{1}{2}mu^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{5}{12}mu^2\approx 0.4167\,mu^2$。以分数精确地逐步模拟运动（位置及碰撞时刻），得到相同的数值、恰好两次碰撞，以及与公式吻合的速率 V_n；模拟亦确认了对每个不超过 11 的 N，都恰好有 N 次碰撞，且损失公式成立。
- 单位：损失是质量乘以速率的平方，正是能量应有的单位。

常见错误

- 只用第 n 粒粒子的动量，忘记木块已包含 $P_1,\ldots,P_{n-1}$（或忘记木块本身的质量 km）。
- 数成 $N+1$ 次碰撞：P_{N+1} 的速率恰好与木块相同，所以永远不会接触木块。
- 把 $P_{N+1},P_{N+2},\ldots$ 的动能计入损失；它们从不碰撞，所以并无损失任何动能。

STEP 之外

这木块是一个在扫集物质时质量不断增加的物体，与火箭、以及穿过云层下落的雨点属同类问题。对于这类变质量系统（variable-mass systems），我们把牛顿（Newton）第二定律以“动量的变化率等于力”的形式应用于整个系统，正如我们逐次碰撞所做的一样。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）仔细地讨论了变质量系统和火箭运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。