详细解答

# STEP II 2012，第 10 题

力学 · 摩擦力与力矩

**STEP II 2012，第 10 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q10

## 关键思路

杆是圆形横截面（cross-section）的一条弦（chord），所以每个法向反作用力（normal reaction）都直指圆心 $O$，而杆与每条半径之间的夹角 $\phi$ 由几何关系决定：$\cos\phi = a/r$。杆唯一可能的运动是绕 $O$ 转动，因此两端会一同滑动，而我们也知道每一端的摩擦力（friction）朝哪个方向。对中点取力矩（moments）可消去重量，立即得出第一条关系式；再对 $O$ 取力矩并分解（resolve）一次，便可求得 $\tan\theta$。

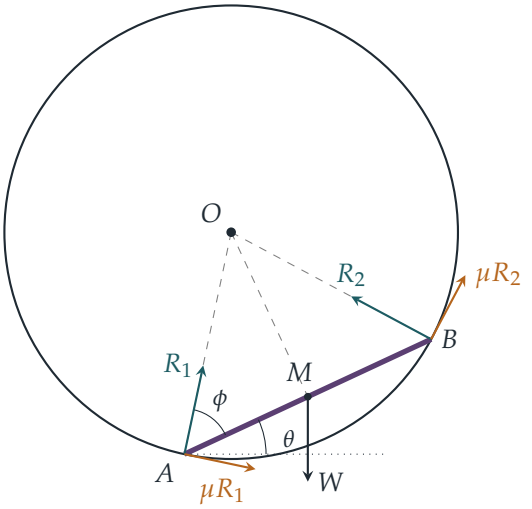
## 解答

### 建立模型

把杆视为重量为 $W$ 的均匀刚性杆（uniform rigid rod），只在两端 $A$（较低）及 $B$（较高）与粗糙圆柱接触。设 $O$ 为圆形横截面的圆心，$M$ 为 $AB$ 的中点。由于 $OA = OB = r$，三角形 $OAB$ 是等腰三角形（isosceles triangle），所以 $OM$ 垂直于 $AB$，且

$$\cos\phi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \qquad OM = \sqrt{r^2 - a^2} = r\sin\phi,$$

其中 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$。杆与半径之间的夹角在两端都是 $\phi$。




**想一想** 每一端的摩擦力朝哪个方向?

两端始终留在圆上，而 $AB$ 的长度不变，所以 $OM$ 的长度保持不变，并一直垂直于杆：唯一可能的运动是绕 $O$ 的转动。由于 $\theta \neq 0$，$M$ 并不在 $O$ 的正下方，因此重量对 $O$ 有一个力矩，使杆转向水平（在图中为顺时针：$A$ 会沿壁向上移动，$B$ 则向下移动）。反作用力都经过 $O$，所以只有摩擦力能抵抗这个转动。两端会一同移动，所以在即将滑动时，两端的摩擦力都达到极限（limiting friction）：$\mu R_1$ 和 $\mu R_2$ 分别沿 $A$ 和 $B$ 的切线（tangent）方向作用，两者相对于 $O$ 都是逆时针方向，如图所示。

### $R_1$ 与 $R_2$ 之间的关系

对 $M$ 取力矩，从而消去重量。$R_1$ 的作用线（line of action）是 $AO$，它与 $AM$ 成角 $\phi$，所以它与 $M$ 的垂直距离是 $a\sin\phi$。$A$ 处的摩擦力沿切线作用，而切线垂直于 $OA$，所以它与 $M$ 的距离是 $a\cos\phi$。$B$ 处的情况相同。在图中，$R_1$ 使杆绕 $M$ 顺时针转动，而 $R_2$ 及两个摩擦力则使杆逆时针转动，所以

$$R_1\, a\sin\phi = R_2\, a\sin\phi + \mu R_1\, a\cos\phi + \mu R_2\, a\cos\phi.$$

除以 $a\cos\phi$ 并移项整理，得

$$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi,$$

此即所求。特别地，$R_1 > R_2$：较低的一端压得较用力。

**求 $\tan\theta$**

*对 $O$ 取力矩*。反作用力都经过 $O$，而每个摩擦力的力臂都是 $r$。重量作用于 $M$，由于 $OM$ 垂直于杆，它与铅垂线成角 $\theta$，所以 $M$ 与 $O$ 的水平距离是 $OM\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$。因此

$$\mu(R_1+R_2)\,r = Wr\sin\phi\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \mu(R_1+R_2) = W\sin\phi\sin\theta. \tag{1}$$

*沿垂直于杆的方向分解*（指向 $O$ 所在的一侧）。每个反作用力与杆成角 $\phi$，所以贡献 $R_i\sin\phi$。每个摩擦力与这个垂直方向成角 $\phi$；在 $A$ 处它指离杆上 $O$ 所在的一侧，在 $B$ 处则指向该侧。重量贡献 $-W\cos\theta$。所以

$$(R_1+R_2)\sin\phi - \mu(R_1-R_2)\cos\phi = W\cos\theta. \tag{2}$$

记 $S = R_1+R_2$。由第一个结果得 $R_1-R_2 = \mu S\cot\phi$，所以 (2) 变为

$$S\,\frac{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}{\sin\phi} = W\cos\theta,$$

而 (1) 表示 $\dfrac{\mu S}{\sin\phi} = W\sin\theta$。两式相除（杆是倾斜而非铅垂的，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 且 $\cos\theta\neq 0$），得

$$\tan\theta = \frac{\mu}{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}.$$

分子分母同乘 $r^2$，并利用 $r^2\sin^2\phi = r^2-a^2$、$r^2\cos^2\phi = a^2$：

$$\tan\theta = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2-\mu^2a^2} = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2(1+\mu^2)},$$

此即所求。

**推导 $\lambda<\phi$**

> **想一想** 手上只有一条等式，不等式从何而来?

来自正负号。杆与水平成角 $\theta$，且 $\theta\neq 0$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\tan\theta>0$。由于 $\mu>0$，分子 $\mu r^2$ 为正，所以分母也必须为正：

$$r^2\sin^2\phi-\mu^2r^2\cos^2\phi>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\phi>\mu^2=\tan^2\lambda.$$

$\phi$ 和 $\lambda$ 都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内，而 tan 在此区间为正且递增，所以由 $\tan\phi>\tan\lambda$ 得 $\lambda<\phi$。

## 验算

- 光滑极限：当 $\mu\to 0$ 时，$\tan\theta\to 0$，所以光滑的杆只能水平静止，且 $M$ 在 $O$ 的正下方。正确。

- 数值：取 $r = 5$、$a = 3$、$\mu = \frac{1}{2}$，得 $\tan\phi = \frac{4}{3} > \frac{1}{2}$，以及 $\tan\theta = \frac{12.5}{25-11.25} = \frac{10}{11}$。在这个角度（以及数以千计随机选取的 $r, a, \mu$）下，以向量形式解两条力的方程求 $R_1, R_2$，所得结果使对 $O$ 的力矩为零，并在 $10^{-12}$ 的误差内满足 $\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi$。
- $\lambda < \phi$ 的物理意义：$\lambda$ 是摩擦角（angle of friction）。若 $\lambda \geq \phi$，摩擦力足以在任何倾角下支撑着杆，所以杆永远不会处于即将滑动的状态，也就不存在这样的 $\theta$。

## 常见错误

- 把反作用力取为垂直于杆，而不是沿半径方向：接触面是圆柱，所以法线是圆柱的法线。
- 把两个摩擦力沿杆取为相反方向。两端绕 $O$ 的转动方向相同，所以两端的摩擦力相对于 $O$ 都是逆时针方向。
- 为求第一个结果而沿杆及垂直于杆分解：两条方程都含有 $W$。对 $M$ 取力矩则可避开它。

## STEP 之外

推导 $\lambda < \phi$ 用的正是摩擦锥（friction cone）的概念：粗糙接触点的总反作用力必须落在与法线成角 $\lambda$ 的范围之内。这里杆在两点接触，问题在于两个摩擦锥是否留有空间，让三个力交于一点。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）更全面地讨论摩擦力及刚体静力学（rigid-body statics），其中包括需要先判断即将发生的运动方向的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。