详细解答

STEP II 2012，第 1 题

纯数学 · 二项式级数的系数

STEP II 2012，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q1

关键思路

每个因子 $(1-x^k)^{-1}$ 都是以 x^k 为公比的几何级数（geometric series），所以把这些因子相乘，再读出 x^n 的系数（coefficient），实际上就是在数算把 n 写成若干容许部分之和的方法数。一旦把系数看成计数，分情况讨论便会自然理顺；而乘以 $(1-x)^{-1}$，只不过是把一列系数变成它的累积和（running totals）。

解答

通项

由二项式展开（binomial expansion），当 $|y|<1$ 时，$(1-y)^{-2}=\sum_{r\geq 0}(r+1)y^r$（系数为 $\binom{-2}{r}(-1)^r=r+1$）。令 $y=x^6$，

$$(1-x^6)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^{6r},$$

因此通项（general term）是 $(r+1)x^{6r}$，而每个指数不是 6 的倍数的 x 幂，其系数都是 0。

第 (i) 部分

另外，$(1-x^3)^{-1}=\sum_{s\geq 0}x^{3s}$。把两个级数相乘，每一对满足 $6r+3s=n$ 的非负整数（non-negative integers）(r,s) 都会产生一项 x^n，贡献为 $(r+1)\cdot 1$。所以

$$\text{系数，对应}x^n=\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ 6r+3s=n}}(r+1).$$

当 $n = 24$ 时，我们需要 $2r + s = 8$，所以 r 可以是 $0, 1, 2, 3, 4$（每个 r 都恰好对应一个 $s = 8 - 2r \geq 0$）。x^{24} 的系数为

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

一般的 n。由于 $6r + 3s$ 必定是 3 的倍数，除非 $3 \mid n$，否则系数为 0。若 $n = 3m$，我们需要 $2r + s = m$，而对每个满足 $0 \leq 2r \leq m$ 的 r，都恰好有一个合适的 s。因此 r 由 0 取到 $\lfloor m/2 \rfloor$，系数为

$$1 + 2 + \cdots + (\lfloor m/2 \rfloor + 1).$$

按 n 除以 6 的余数分类：

- $n = 6k$（即 $m = 2k$，$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：系数为 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$；
- $n = 6k + 3$（即 $m = 2k + 1$，$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：系数同样是 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$；
- $n \not\equiv 0 \pmod 3$：系数为 0。

验算一下：$n = 24 = 6 \times 4$ 给出 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$，与上面所得相同。

第 (ii) 部分

以 b_n 表示第 (i) 部分求得的 x^n 系数，以 c_n 表示现在要求的系数。由于 $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$，

$$\Big(\sum_j b_j x^j\Big)(1 + x + x^2 + \cdots) = \sum_n \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) x^n,$$

所以 $c_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$，即第 (i) 部分系数的累积和。

> **想一想** 为甚么乘以 $(1 - x)^{-1}$ 会得到累积和?

要在乘积中得到 x^n，我们从第一个级数取 x^j，再从 $1 + x + x^2 + \cdots$ 取 x^{n-j}，而后者的系数永远是 1。所以每个满足 $0 \leq j \leq n$ 的 b_j 都恰好在 c_n 中出现一次，权重为 1。

只有 $3 \mid j$ 的 b_j 才不为零，而由第 (i) 部分可知它们成对相等：$b_{6k} = b_{6k+3} = T_{k+1}$，其中 $T_p = \frac{1}{2}p(p+1)$ 是第 p 个三角形数（triangular number）。所以当 $n = 24$ 时，

$$\begin{aligned} c_{24} &= (b_0 + b_3) + (b_6 + b_9) + (b_{12} + b_{15}) + (b_{18} + b_{21}) + b_{24} \\ &= 2(1 + 3 + 6 + 10) + 15 = 40 + 15 = 55, \end{aligned}$$

正如题目所要求。

当 $n = 25$ 时，由于 $3 \nmid 25$，多出来的一项 b_{25} 为 0，所以 $c_{25} = c_{24} = 55$。

当 $n = 66 = 6 \times 11$ 时，同样的规律给出

$$c_{66} = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_{11}) + T_{12}.$$

首 p 个三角形数之和是四面体数（tetrahedral number）$\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$（可用归纳法（induction）证明，或由曲棍球棒恒等式（hockey-stick identity）得 $T_1 + \cdots + T_p = \binom{p+2}{3}$）。所以 $T_1 + \cdots + T_{11} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 286$，而 $T_{12} = 78$。因此

$$c_{66} = 2 \times 286 + 78 = 650.$$

同样的论证可得出一般公式：若 $n = 6K + r$ 且 $0 \le r \le 2$，则 $c_n = 2\binom{K+2}{3} + \binom{K+2}{2}$；若 $3 \le r \le 5$，则 $c_n = 2\binom{K+3}{3}$。取 $K = 4$，第一条公式给出 $40 + 15 = 55$；取 $K = 11$，则给出 $572 + 78 = 650$。

验算

第 (ii) 部分中 x^n 的系数，数算的是 $6a + 6b + 3c + d = n$ 的非负整数解的个数（每个因子对应一个几何级数，$(1 - x^6)^{-2}$ 算作两个）。用电脑直接数算这些解，对 $n = 24, 25, 66$ 分别得出 55、55 和 650。把级数逐项乘开至 x^{80}，亦证实了两部分的公式。用人手验算小的情况也很快：在第 (ii) 部分中，$c_0 = c_1 = c_2 = 1$，$c_3 = c_4 = c_5 = 2$，与 $K = 0$ 时的一般公式吻合。

常见错误

- 在第 (i) 部分遗漏 $n = 6k + 3$ 的情况：3 的奇数倍确实会出现，来自奇数个 x^3 因子。
- 把 $(1 - x^6)^{-2}$ 的通项写成 $r\,x^{6r}$ 而非 $(r+1)x^{6r}$；常数项是 1，不是 0。
- 把 x^{25} 当作全新的计算：它等于 x^{24} 的系数，因为第 (i) 部分的级数中没有指数为 25 的项。

STEP 之外

像这样用作计数工具的幂级数称为*生成函数*（generating functions）；这里的乘积数算的是用面值 6、6（另一款设计）、3 和 1 的硬币支付 n 便士（pence）的方法数。整数分拆（partitions）理论正是从这个想法发展出来的；而答案是随 n 模 6 而定的分段多项式（piecewise polynomials），这是一个普遍现象（“拟多项式”（quasi-polynomials））。若想读一本生动的入门书介绍这个方法，可阅读 Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函数学》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。