详细解答

STEP I 2012，第 9 题

力学 • 抛体运动

STEP I 2012，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

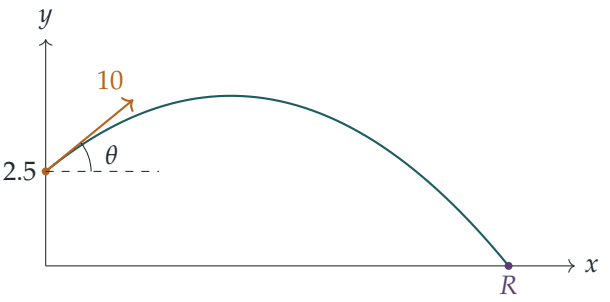
step.maths.org/questions/12-s1-q9

关键思路

这是一个从高处抛出的抛射体（projectile），所以飞行时间（time of flight）由一条关于 t 的二次方程（quadratic equation）给出，而题目的重点其实是把它的根改写成以 $c = \cos 2\theta$ 表示。倍角公式（double-angle formulae）$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-c)$ 和 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$ 包办了所有工作。一旦射程（range）写成单一变量 c 的函数（function），求它的最大值就只是普通的微积分，只需在平方时稍加小心。

解答

我们把铅球模拟为只受重力作用而自由运动的质点（particle），不计空气阻力（air resistance）。取原点在抛射点正下方的地面上，x 轴水平，y 轴铅直向上，并假设 $0 \le \theta < 90°$（铅球向前及向上抛出），因此 $\sin\theta \ge 0$ 而 $\cos\theta > 0$。



飞行时间

水平速度保持为 $10\cos\theta$，而铅直方向的运动初速为 $10\sin\theta$、加速度为 -10，所以在时间 t 时

$$x = 10t\cos\theta, \qquad y = 2.5 + 10t\sin\theta - 5t^2.$$

铅球在 $y = 0$ 时落地，即当

$$5t^2 - 10t\sin\theta - 2.5 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t^2 - 2t\sin\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

两根之积为 $-\frac{1}{2} < 0$，所以恰有一个正根，就是取加号的那一个：

$$T = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}}.$$

现在利用 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1-c)$。由于 $\sin\theta \geq 0$，我们可以写 $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$，而 $\sin^2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2-c)$。因此

$$T = \sqrt{\frac{1-c}{2}} + \sqrt{\frac{2-c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right),$$

这就是所求的时间（以秒为单位）。

射程

同样地，$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$，且 $\cos\theta > 0$，所以 $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$。射程为

$$\begin{aligned} R = 10T\cos\theta &= 10\sqrt{\frac{1+c}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right) \\ &= 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{(1+c)(2-c)}\right) = 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{2+c-c^2}\right)\ \text{m}. \end{aligned}$$

当 θ 取遍 $[0°, 90°)$ 时，$c = \cos 2\theta$ 取遍 $(-1, 1]$，所以我们要在这个区间上求 R 的最大值。

求射程的最大值

对于 $-1 < c < 1$，求导得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 5\left(\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}\right).$$

驻点（stationary point）须满足

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}. \qquad (*)$$

想一想 我们可以直接把 $(*)$ 平方吗？可能会出甚么问题？

平方可能会引入增根（extraneous roots），因为它丢失了正负号的信息。两个分母都是正数，所以在 $(*)$ 中，c 与 $1-2c$ 必须同号（或同时为零，但这是不可能的）。这迫使 $0<c<\frac{1}{2}$，我们要记住这一点。平方并去分母：

$$\begin{aligned}4c^2(2+c-c^2) &= (1-2c)^2(1-c^2)\\ 8c^2+4c^3-4c^4 &= 1-4c+3c^2+4c^3-4c^4\\ 5c^2+4c-1 &= 0\\ (5c-1)(c+1) &= 0.\end{aligned}$$

根 $c=-1$ 不在 $0<c<\frac{1}{2}$ 之内（它对应铅直向上抛），所以唯一的驻点是 $c=\frac{1}{5}$。它确实满足 $(*)$：由于 $\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 及 $\sqrt{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$，两边都等于 $\frac{1}{2\sqrt{6}}$。

在这一点

$$R(\tfrac{1}{5})=5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)=5\sqrt{6}\approx 12.25.$$

要确认这是最大值，可与区间的端点比较：当 $c\to -1$ 时 $R\to 0$，而 $R(1)=5\sqrt{2}\approx 7.07$。由于 R 在 $[-1,1]$ 上连续（continuous），并在区间内部可微（differentiable），其最大值必在端点或驻点取得；而唯一的驻点给出这些值中最大的一个。所以当 $c=\frac{1}{5}$ 时射程最大，得证。（这对应 $\theta=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\approx 39.2^\circ$，比 45° 略小。）

多出的距离

在 45° 时，$c=\cos 90^\circ=0$，所以

$$R(0)=5\left(1+\sqrt{2}\right).$$

因此多出的距离是

$$5\sqrt{6}-5\left(1+\sqrt{2}\right)=5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)\ \text{m},$$

得证。

验算

- 在 $\theta=0$（$c=1$）时，时间为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，与一个从 2.5 m 高的平台滚落的球所满足的 $2.5=5t^2$ 吻合。
- 当 $c\to -1$（铅直向上抛）时，射程趋向 0，理应如此。

- 以数值计算，多出的距离为 $5(2.4495 - 1.4142 - 1) \approx 0.176\,\text{m}$，只有约 18 cm：最佳点附近非常平坦。对飞行过程作逐步数值模拟，以及对 $R(c)$ 作精细的网格搜索（grid search），两者都与公式吻合，并得出最大值位于 $c = 0.2$。

常见错误

- 在二次公式中取了减号，得出负的时间。
- 把 $(*)$ 平方后保留了 $c = -1$ 而没有验证，或者忘记论证 $c = \frac{1}{5}$ 是最大值而非最小值。
- 假设最佳角度是 45°：这只在抛出点与落地点高度相同时才成立。

STEP 之外

从高处抛出时，最佳角度总是低于 45°；一般而言，最佳角度满足 $\tan\theta = u/\sqrt{u^2 + 2gh}$，在本题中给出 $\tan\theta = \sqrt{2/3}$，与 $\cos 2\theta = \frac{1}{5}$ 等价。对带参数的函数求最优值，并留意最大值附近有多平坦，是敏感度分析（sensitivity analysis）的初步体验：在最大值附近，参数的微小误差只会造成二阶（second-order）的损失。若想进一步了解有空气阻力及无空气阻力的抛射体运动，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。