详细解答

STEP I 2012，第 8 题

纯数学 · 齐次微分方程

> **STEP I 2012，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q8

关键思路

两条方程都是齐次（homogeneous）的：除了一个整体的 x 幂次之外，每一项关于 x 和 y 的总次数都相同。若设 $y = xv$，那个 x 的幂次便会消去，方程随即分离成 v 的部分和 x 的部分。第 (i) 部分会一步步带你完成这个过程。第 (ii) 部分则留给你自己处理：把方程除以 x，便可看出它是同一类方程，而之后关于 v 的积分需要用到部分分式（partial fractions）。

解答

第 (i) 部分

若 $y = xv$，由乘积法则（product rule）得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。代入，得

$$x(xv)\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + x^2v^2 - 2x^2 = x^3v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2x^2v^2 - 2x^2 = 0.$$

由于 $x \neq 0$，我们可以除以 x^2，得

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v^2 - 2 = 0,$$

此即所求。

接着我们分离变量（separate the variables）。方程表明 $xv\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1 - v^2)$。只要 $v^2 \neq 1$，

$$\int \frac{v}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1 - v^2| = 2\ln|x| + c.$$

两边乘以 -2 再取指数，得 $|1 - v^2| = Ax^{-4}$，其中 $A > 0$ 为某常数，因此

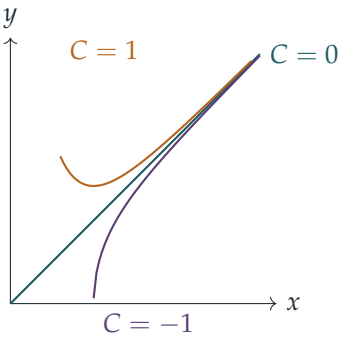
$$x^4(v^2 - 1) = C,$$

其中 $C = \pm A$ 是非零常数。先前搁置的情况 $v = \pm 1$（即 $y = \pm x$）也是解：此时 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$ 且 $2v^2 - 2 = 0$。它们恰好就是 $C = 0$ 的情况，所以 C 可以是任何常数。

最后，代入 $v = y/x$：

$$x^4\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = x^2(y^2 - x^2) = C,$$

这正是所要求的形式。



上图展示了第一象限中的几条解曲线。正如 $y^2 = x^2 + C/x^2$ 所提示，当 $x \to \infty$ 时，它们都趋近直线 $y = x$。

第 (ii) 部分

$6x + 5y$ 中每一项的次数都是 1，$y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的次数也是 1。这提示我们用同样的代换 $y = xv$：

$$xv\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + 6x + 5xv = 0.$$

除以 $x \neq 0$ 并整理各项，得

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -(v^2 + 5v + 6) = -(v+2)(v+3).$$

想一想 怎样求 $\dfrac{v}{(v+2)(v+3)}$ 的积分？

用部分分式。设 $v = P(v+3) + Q(v+2)$。代入 $v = -2$ 得 $P = -2$，代入 $v = -3$ 得 $Q = 3$。所以

$$\frac{v}{(v+2)(v+3)} = \frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}.$$

只要 $v \neq -2, -3$，分离变量得

$$\int\left(\frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}\right)\mathrm{d}v = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad\Longrightarrow\quad 3\ln|v+3| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + c.$$

因此 $|x|\,|v+3|^3/(v+2)^2$ 是常数。去掉绝对值符号（在一条 $v \neq -3$ 的解曲线上，$x(v+3)^3$ 的正负号不会改变），得

$$\frac{x(v+3)^3}{(v+2)^2} = K.$$

现在代入 $v = y/x$。分子是 $x(y+3x)^3/x^3$，分母是 $(y+2x)^2/x^2$，所以 x 的幂次完全消去：

$$\boxed{(y+3x)^3 = K(y+2x)^2},$$

其中 K 是常数。

我们排除了的直线也是解。若 $y = -3x$，则 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x$ 而 $6x+5y = -9x$，所以方程成立。这条直线就是方框中形式在 $K = 0$ 时的情况。若 $y = -2x$，则 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x$ 而 $6x+5y = -4x$，所以这条直线也是解。它不对应任何有限的 K，而是对应 $K \to \infty$。若把解写成 $(y+2x)^2 = k(y+3x)^3$，则可改为以 $k = 0$ 涵盖它。

验算

- 第 (i) 部分：对 $x^2y^2 - x^4 = C$ 作隐函数微分（implicit differentiation），得 $2xy^2 + 2x^2y\,y' - 4x^3 = 0$。除以 $2x$ 便还原为原方程。
- 第 (ii) 部分：我们从多个随机起点，以数值方法（Runge–Kutta 方法）逐步求解方程。沿每条解曲线，$(y+3x)^3/(y+2x)^2$ 这个量都保持不变，误差约为 10^{-14}。例如，通过 $(1,1)$ 的曲线有 $K = 64/9$。
- 每条方程中通过原点的直线解 $y = \pm x$ 和 $y = -2x,\ -3x$，分别来自 $2v^2 - 2 = 0$ 和 $v^2 + 5v + 6 = 0$ 的根。这是一个好迹象，显示关于 v 的方程是正确的。

常见错误

- 忘记乘积法则：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是 $v + x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，而不是 $x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。
- 部分分式算错（例如写成 $2/(v+2) - 3/(v+3)$）。可以代入一个值（例如 $v = 0$）检验分解是否正确。
- 除以 $1 - v^2$ 或 $(v+2)(v+3)$ 时没有指出这样会遗失某些直线解。

STEP 之外

形如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(y/x)$ 的方程称为齐次方程。缩放变换 $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ 会把它的解曲线互相映射，这正是 $v = y/x$ 奏效的原因。这是索菲斯·李（Sophus Lie）提出的一个深刻思想的最简单例子：微分方程（differential equation）的对称性（symmetry）可以

用来降低方程的阶（order）。直线解 $y = mx$ 就是在缩放下保持不变的曲线。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讲解了齐次方程及其他一阶方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。