详细解答

STEP I 2012，第 7 题

纯数学 · 周期性递推关系

STEP I 2012，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s1-q7

关键思路

一个以周期（period）1、2 或 3 重复的数列（sequence），由其首几项完全决定，所以递推关系（recurrence relation）只需对一个周期内少数几组连续三项成立（再加上首尾相接的那几组）。把这些条件逐一写出，便得到一组关于 x、y、z 的小型联立线性方程（simultaneous linear equations）。这组方程有一个不全为零的解，正是这一点迫使 p 和 q 必须满足所求的条件。整个过程中，$x \neq 0$ 这个事实是我们能够约去的关键。

解答

第 (i) 部分

若对每个 n 都有 $t_n = x$，则递推关系给出 $x = px + qx$，即 $(p+q-1)x = 0$。由于 $x \neq 0$，得 $p + q = 1$。

反过来，若 $p + q = 1$ 且 $t_0 = t_1 = x$，则 $t_2 = (p+q)x = x$，由归纳法（induction）可知每一项都等于 x。x 不受任何限制，因此它可以是任何非零实数。

第 (ii) 部分

模式 $x, y, x, y, \ldots$ 满足递推关系，当且仅当两组连续三项 (x, y, x) 和 (y, x, y) 满足递推关系：

$$x = py + qx, \qquad \text{即} \quad (1-q)x = py, \tag{1}$$

$$y = px + qy, \qquad \text{即} \quad (1-q)y = px. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相加及相减，得

$$(1-q-p)(x+y)=0, \qquad (1-q+p)(x-y)=0.$$

$x+y$ 和 $x-y$ 不可能同时为零，否则 $x=0$。若 $x+y\neq 0$，则 $p+q=1$；若 $x-y\neq 0$，则 $q-p=1$。因此 $q+p=1$ 和 $q-p=1$ 之中至少有一个成立，得证。

接着推导 x 与 y 之间的关系。

- 若 $q+p=1$，则 $1-q=p$，(1) 变成 $px=py$。所以 $x=y$，前提是 $p\neq 0$。
- 若 $q-p=1$，则 $1-q=-p$，(1) 变成 $-px=py$。所以 $x=-y$，同样前提是 $p\neq 0$。

唯一的例外是 $p=0$，此时两种情况都给出 $q=1$。当 $p=0$ 且 $q=1$ 时，递推关系为 $t_{n+2}=t_n$，任何模式 $x,y,x,y,\ldots$ 都满足它，因此 x 与 y 之间没有任何关系。故除非 $p=0$ 且 $q=1$，否则 $x=y$ 或 $x=-y$。

第 (iii) 部分

现在模式是 $x,y,z,x,y,z,\ldots$，我们需要三组连续三项 (x,y,z)、(y,z,x) 和 (z,x,y)：

$$z=py+qx, \tag{3}$$
$$x=pz+qy, \tag{4}$$
$$y=px+qz. \tag{5}$$

利用 (3) 从另外两条方程中消去 z：

$$\begin{aligned}
&(4):\quad x=p(py+qx)+qy &&\Longrightarrow\quad (pq-1)x+(p^2+q)y=0,\\
&(5):\quad y=px+q(py+qx) &&\Longrightarrow\quad (p+q^2)x+(pq-1)y=0.
\end{aligned}$$

把第一条方程乘以 $pq-1$，第二条乘以 p^2+q，然后相减。含 y 的项互相抵消，剩下

$$\left[(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)\right]x=0.$$

想一想 为甚么括号内的式子必须为零？这组方程会不会根本没有解？

它们确实有解：数列存在，所以 x 和 y 同时满足两条方程。而 $x\neq 0$，所以可以除以 x。展开括号，

$$\begin{aligned}
(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2) &= p^2q^2-2pq+1-\left(p^3+p^2q^2+pq+q^3\right)\\
&= 1-3pq-p^3-q^3,
\end{aligned}$$

所以 $p^3+q^3+3pq-1=0$，得证。

因式分解（factorisation）。这个式子是 $a^3+b^3+c^3-3abc$，其中 $a=p$、$b=q$、$c=-1$，而标准恒等式（identity）

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

给出

$$p^3+q^3+3pq-1=\tfrac{1}{2}(p+q-1)\left[(p-q)^2+(q+1)^2+(p+1)^2\right].$$

（如果记不起这个恒等式，可以展开来验证：方括号等于 $2(p^2+q^2+1-pq+p+q)$，再乘以 $p+q-1$ 便还原为原来的三次式。）乘积为零，所以 $p+q=1$ 或 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$。

情况 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$。实数平方之和为零，当且仅当每个平方都为零，所以 $p=q=-1$。此时 (3) 变成 $z=-y-x$，即 $x+y+z=0$。

情况 $p+q=1$。把 $q=1-p$ 代入 (3)、(4) 和 (5)，并把每条整理成差的形式：

$$z-x=p(y-x),\qquad x-y=p(z-y),\qquad y-z=p(x-z).$$

设 $a=y-x$、$b=z-y$、$c=x-z$，于是 $a+b+c=0$。第一条和第三条方程表示 $c=-pa$ 及 $b=-pc=p^2a$。于是

$$0=a+b+c=a(1-p+p^2).$$

> ? **想一想** $1-p+p^2$ 可以为零吗?

不可以：对每个实数 p，$1-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$。所以 $a=0$，由此 $c=-pa=0$，进而 $b=0$。即 $x=y=z$。

两种情况不会重叠，因为 $p=q=-1$ 给出 $p+q=-2\neq 1$。所以 $x=y=z$（当 $p+q=1$ 时）或 $x+y+z=0$（当 $p=q=-1$ 时）。两者都确实会出现：在第二种情况中，递推关系 $t_{n+2}=-t_{n+1}-t_n$ 对任何初始值都给出 $x,\ y,\ -x-y,\ x,\ y,\ \ldots$。

验算

- 取 $p=q=-1$、$t_0=2$ 及 $t_1=5$，数列为 $2,5,-7,2,5,-7,\ldots$，而 $2+5-7=0$。
- 取 $p=3$ 及 $q=4$（所以 $q-p=1$），由 $1,-1$ 开始得 $t_2=-3+4=1$ 及 $t_3=3-4=-1$，正如第 (ii) 部分所预测般交替出现。
- 当 $p=2$、$q=-1$ 时，三次式给出 $8-1-6-1=0$，与 $p+q=1$ 一致。我们亦在 1000 组随机 (p,q) 上验证了展开式、因式分解，以及三次式与 (3)–(5) 的 3×3 行列式（determinant）一致。模拟递推关系亦证实了上述每一种情况。

常见错误

- 在第 (ii) 部分断定 $p+q=1$ 及 $q-p=1$ 同时成立。论证只表明至少有一个成立；两者同时成立只在例外情况 $p=0$、$q=1$ 中发生。
- 在第 (ii) 部分除以 p，却没有察觉 $p=0$ 正是题目所问的例外情况。
- 忘记首尾相接的方程 (4) 和 (5)。每个周期只用一条方程，不足以迫出所求的条件。

STEP 之外

处理 $t_{n+2}=pt_{n+1}+qt_n$ 的标准方法是通过特征方程（characteristic equation）$\lambda^2=p\lambda+q$：一般而言 $t_n=A\alpha^n+B\beta^n$，其中 α 和 β 是它的根。一个数列每 k 步重复一次，当且仅当它所用到的根满足 $\lambda^k=1$。常数数列需要根 1（所以 $p+q=1$），交替数列需要根 -1（所以 $q-p=1$）。情况 $p=q=-1$ 给出 $\lambda^2+\lambda+1=0$，其根是复数单位立方根（cube roots of unity），这正是为甚么它们的和 $1+\omega+\omega^2=0$ 会以 $x+y+z=0$ 的形式重现。这其实是乔装了的线性代数（linear algebra）（作用于数列上的移位映射（shift map）），而斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）正是以这种方式，通过特征值（eigenvalues）来处理递推关系。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。