详细解答

STEP I 2012，第 6 题

纯数学 · 三角不等式

STEP I 2012，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s1-q6

关键思路

这里每个仰角（angle of elevation）的对边都是同一条旗杆，所以每个余切（cotangent）都只是一段水平距离除以旗杆高度。这样，第一个结果就变成关于圆中线段长度的事实：$DC^2 = AD \cdot DB$，因为半圆上的圆周角（angle in a semicircle）是直角。三角恒等式（trigonometric identity）把 $\cot p \cot q - \cot^2 \frac{1}{2}(p+q)$ 化成一个能直接看出正负号的式子。得到这个不等式后，几何部分几乎不费吹灰之力就给出最后的结果。

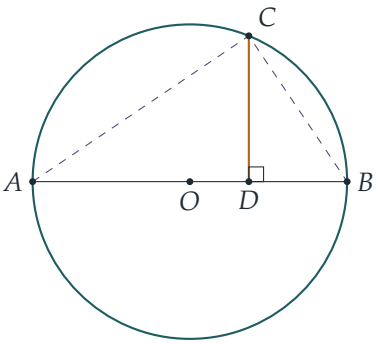
解答

几何结果

设旗杆高度为 $h > 0$，顶端为 T，因此 DT 是铅垂的。A、B、C 都在地面上，所以三角形 TDA、TDB、TDC 在 D 处都是直角。因此

$$\cot\alpha = \frac{AD}{h}, \qquad \cot\beta = \frac{DB}{h}, \qquad \cot\phi = \frac{DC}{h}.$$

由于 α 和 β 都是锐角，D 既不是 A 也不是 B（从这两点中任何一点看，仰角都会是直角），所以 D 严格位于 A 与 B 之间，且 $DC > 0$。



现在看地面平面图。设 O 为圆心，r 为半径，$x = OD$（以指向 B 的方向为正，所以 $-r < x < r$）。于是 $AD = r + x$，$DB = r - x$，而在三角形 ODC 中应用毕氏定理（Pythagoras' theorem），得 $DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - x^2$。因此

$$AD \cdot DB = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2 = DC^2.$$

（等价地说：$\angle ACB$ 是半圆上的圆周角，所以是直角，而 CD 是直角三角形 ACB 的高（altitude）。）两边除以 h^2，

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{AD \cdot DB}{h^2} = \frac{DC^2}{h^2} = \cot^2\phi,$$

得证。

恒等式

记 $s = \frac{1}{2}(p + q)$，并利用二倍角公式（double-angle formulae）的形式 $\sin^2 s = \frac{1}{2}(1 - \cos(p + q))$ 及 $\cos^2 s = \frac{1}{2}(1 + \cos(p + q))$。左边变成

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos p \cos q(1 - \cos(p + q)) - \tfrac{1}{2}\sin p \sin q(1 + \cos(p + q)) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}(\cos p \cos q - \sin p \sin q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(\cos p \cos q + \sin p \sin q) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cos(p + q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\cos(p - q),
\end{aligned}$$

这里用了 $\cos(p + q)$ 和 $\cos(p - q)$ 的复角公式（compound-angle formulae）。此式对所有 p 和 q 都成立。

不等式

把恒等式的右边因式分解：

$$\cos p \cos q \sin^2 s - \sin p \sin q \cos^2 s = \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(1 - \cos(p - q)).$$

现设 $p, q > 0$ 且 $p + q \le \frac{1}{2}\pi$。于是 $0 < p + q \le \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos(p + q) \ge 0$；而 $1 - \cos(p - q) \ge 0$ 永远成立。所以右边非负，从而

$$\cos p \cos q \sin^2 s \;\ge\; \sin p \sin q \cos^2 s.$$

想一想 我们可以放心地把两边除以 $\sin p \sin q \sin^2 s$ 吗?

可以：由于 p 和 q 都是正数，且两者之和不超过 $\frac{1}{2}\pi$，所以 p、q 和 s 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之内，因此 $\sin p$、$\sin q$ 和 $\sin s$ 都严格为正。除以正数 $\sin p \sin q \sin^2 s$ 不会改变不等号的方向：

$$\cot p \cot q \ \geq \ \cot^2 s = \cot^2 \tfrac{1}{2}(p+q).$$

等号成立当且仅当 $p = q$ 或 $p + q = \frac{1}{2}\pi$。

最后结果

取 $p = \alpha$、$q = \beta$。两者都是正数（它们是一条高度为正的旗杆的仰角），且 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$，所以上述不等式适用。结合第一个结果，

$$\cot^2 \phi = \cot \alpha \cot \beta \ \geq \ \cot^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

ϕ 和 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之内（ϕ 是因为 $DC > 0$ 且 $h > 0$），所以两个余切都是正数，可以开平方：$\cot \phi \geq \cot \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

想一想 为甚么这给出的是 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，而不是 $\geq$?

因为 cot 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上是严格递减（decreasing）的：余切越大，角就越小。因此

$$\phi \leq \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \text{只要} \alpha+\beta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

验算

- 若 $D = O$，则 $AD = DB = DC = r$，所以 $\alpha = \beta = \phi$：第一个结果的两边相等，而最后的不等式取等号，与 $p = q$ 的情况吻合。
- 数值测试：取 $r = 1$、$OD = \frac{1}{2}$、$h = 1$，得 $\cot \alpha = 1.5$、$\cot \beta = 0.5$、$\cot^2 \phi = 0.75$，与预期一致。这里 $\alpha + \beta \approx 0.588 + 1.107 = 1.695 > \frac{1}{2}\pi$，所以最后结果不一定适用；事实上 $\phi \approx 0.857 > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx 0.848$，说明条件是必要的。
- 我们在 10^5 组随机的 (p, q) 上验证了恒等式，在容许范围内 2×10^5 组随机数对上验证了不等式，并在约 8×10^4 个满足 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$ 的随机配置中验证了 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，全部没有出错。

常见错误

- 忘记 cot 是递减的，因而得出 $\phi \geq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

- 把不等式除以 $\sin p \sin q \sin^2 s$，却没有说明它为何是正数。
- 忽略条件 $p + q \leq \frac{1}{2}\pi$：正是这个条件保证 $\cos(p+q) \geq 0$；没有它，不等式可以不成立。

STEP 之外

这个不等式说明 $\ln\cot t$ 在 $(0, \frac{1}{4}\pi]$ 上是凸函数（convex function），因为它表示 $\ln\cot p$ 与 $\ln\cot q$ 的平均值不小于两者平均值处的 $\ln\cot$ 值。凸性与琴生不等式（Jensen's inequality）是大学一年级分析学中不等式的一个强大来源。关系式 $DC^2 = AD \cdot DB$ 正是欧几里得（Euclid）作几何平均数（geometric mean）的方法：$\cot\phi$ 是 $\cot\alpha$ 与 $\cot\beta$ 的几何平均数。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）讨论了凸函数，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）则有更多这类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。