详细解答

STEP I 2012，第 5 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 2012，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q5

关键思路

头两个积分都可以用标准方法处理。把 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 写出来，便看出 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的导数（derivative）的相反数，所以代换（substitution）$u = \cos x$ 行得通。至于第二个积分，对数（logarithm）是麻烦的因子，因此我们用分部积分（integration by parts），通过求导把它消去。最后一个积分中，$\cos x + \sin x$ 其实是一个“乔装”的余弦：$\sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$。把变量平移 $\frac{1}{4}\pi$，积分区间便变成 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，而被积函数（integrand）则变成刚才求得的两个积分的组合。

解答

第一个积分

记第一个积分为 I_1。由于 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，代入 $u = \cos x$，于是 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$。当 $x = 0$ 时 $u = 1$；当 $x = \frac{1}{4}\pi$ 时 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$。所以

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\cos x \ln(\cos x)\,\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 2u\ln u\,\mathrm{d}u,$$

其中 $\mathrm{d}u$ 带来的负号已用来对调上下限。用分部积分（对 $\ln u$ 求导，对 $2u$ 积分），

$$\int 2u\ln u\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \int u^2\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \tfrac{1}{2}u^2.$$

在 $u = 1$ 处，其值为 $-\frac{1}{2}$。在 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 处，有 $u^2 = \frac{1}{2}$ 及 $\ln u = -\frac{1}{2}\ln 2$，所以其值为 $-\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$。因此

$$I_1 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(\ln 2 - 1),$$

与所求相符。

第二个积分

记第二个积分为 I_2。我们用分部积分，对 $\ln(\cos x)$ 求导，对 $\cos 2x$ 积分。$\cos 2x$ 的一个方便的原函数（antiderivative）是 $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$，而 $\ln(\cos x)$ 的导数是 $-\sin x / \cos x$。所以

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[\sin x \cos x \, \ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

想一想 为甚么选用 $\sin x \cos x$，而不直接写成 $\frac{1}{2}\sin 2x$?

两者是同一个函数，但写成 $\sin x \cos x$ 的形式时，因子 $\cos x$ 会与 $\ln(\cos x)$ 的导数分母中的 $\cos x$ 互相抵消，剩下容易计算的 $\sin^2 x$ 的积分。

边界项（boundary term）是 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 2$。利用 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}.$$

所以

$$I_2 = -\tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) = \tfrac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2),$$

与所求相符。

最后一个积分

记最后一个积分为 I。由复角公式（compound-angle formula），

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin x \sin \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

这提示我们使用代换 $t = x - \frac{1}{4}\pi$，它把区间 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 变成 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，即 I_1 和 I_2 的积分区间。由 $2x = 2t + \frac{1}{2}\pi$，

$$\cos 2x = \cos\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin 2t, \qquad \sin 2x = \sin\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos 2t,$$

以及

$$\ln(\cos x + \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos t\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t),$$

这是成立的，因为在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上 $\cos t > 0$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\, \mathrm{d}t + I_2 - I_1. \end{aligned}$$

余下的积分等于零：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

所以，利用上面两个结果，

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) - \tfrac{1}{8}(2\ln 2 - 2) = \frac{\pi - 4\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

验算

用辛普森法则（Simpson's rule）算得 $I_1 \approx -0.076713$、$I_2 \approx -0.030588$ 及 $I \approx 0.046125$，与 $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$、$\frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2)$ 及 $\frac{1}{8}(\pi - 4\ln 2)$ 吻合至小数点后十位。对第一个积分作一个快速的正负号检查：在 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 上有 $\sin 2x > 0$ 及 $\ln(\cos x) < 0$，所以 I_1 必定是负数，而 $\ln 2 - 1 < 0$ 正好如此。

常见错误

- 在 I_2 的分部积分中漏掉边界项。它在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 处并不为零。
- 把 $\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$ 和 $\sin(2t + \frac{1}{2}\pi)$ 的正负号弄反，结果得到 $I_1 - I_2$ 或 $I_1 + I_2$，而不是 $I_2 - I_1$。
- 把 $\ln\sqrt{2}$ 带来的常数 $\frac{1}{2}\ln 2$ 直接丢掉，却没有检查它的系数积分后是否为零。

STEP 之外

$\ln(\cos x)$ 和 $\ln(\sin x)$ 的积分是经典题材：同样的对称技巧可以得出著名的结果 $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$；而在一般的积分区间上，它们会引出克劳森函数（Clausen function）和卡塔兰常数（Catalan's constant）。在大学一年级的分析（analysis）课程中，你还要检查当对数在端点处趋于无穷时，这类积分是否有定义，这使它们成为反常积分（improper integral）。如想多做这类练习，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。