详细解答

STEP I 2012，第 4 题

纯数学 · 切线与法线

STEP I 2012，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s1-q4

关键思路

一切都源于 $y = \frac{1}{2x}$ 的斜率（gradient），再加上细心的消元（elimination）。当我们求两条只差在把 p 与 q 互换的直线的交点时，把两条方程相减，总会得出一个因子 $p - q$；由于两点相异，我们可以把它约去。在特殊情况下，值得留意条件对 Q 的影响：它令 Q 成为 P 关于直线 $y = x$ 的镜像（mirror image），而这种对称性（symmetry）正好解释了为何 T 和 N 都落在这条直线上。

解答

点 T

在 C 上有 $y = \dfrac{1}{2x}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2x^2}$。因此 P 点的切线（tangent）斜率为 $-\frac{1}{2p^2}$，方程为

$$y - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{2p^2}(x - p).$$

两边乘以 $2p^2$，得 $2p^2y - p = -x + p$，即

$$x + 2p^2y = 2p. \tag{1}$$

同理，Q 点的切线为

$$x + 2q^2y = 2q. \tag{2}$$

以 (1) 减去 (2)，

$$2(p^2 - q^2)\,y = 2(p - q).$$

由于两点相异，$p \neq q$，所以可以除以 $2(p-q)$，得 $(p+q)y = 1$。因为 $p, q > 0$，所以 $p+q \neq 0$，故

$$y = \frac{1}{p+q}.$$

代入 (1)，

$$x = 2p - \frac{2p^2}{p+q} = \frac{2p(p+q) - 2p^2}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

所以 T 是点 $\left(\frac{2pq}{p+q}, \frac{1}{p+q}\right)$，正如所求。

当 $pq = \frac{1}{2}$ 时的点 N

P 点的法线（normal）与切线垂直，所以其斜率为 $2p^2$，方程为

$$y = 2p^2 x - 2p^3 + \frac{1}{2p}. \tag{3}$$

同样地，Q 点的法线为 $y = 2q^2 x - 2q^3 + \frac{1}{2q}$。令两个 y 的表达式相等：

$$2(p^2 - q^2)\, x = 2(p^3 - q^3) - \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) = 2(p^3 - q^3) + \frac{p-q}{2pq}.$$

除以 $2(p-q) \neq 0$，

$$(p+q)\, x = p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{4pq}.$$

这对任何相异的 p 和 q 都成立。现在运用 $pq = \frac{1}{2}$，于是 $\frac{1}{4pq} = \frac{1}{2} = pq$，右边变成

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2.$$

因此 $x = p + q$。代入 (3)，

$$y = 2p^2(p+q) - 2p^3 + \frac{1}{2p} = 2p^2 q + \frac{1}{2p} = p\,(2pq) + q = p + q,$$

这里两次用到 $2pq = 1$：$2p^2 q = p(2pq) = p$，以及 $\frac{1}{2p} = q$。因此

$$N = (p+q,\ p+q).$$

（注意 $p \neq q$ 加上 $pq = \frac{1}{2}$，意味着 $p \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$，这是对 p 的唯一限制。）

想一想 为甚么 T 和 N 偏偏会落在 $y = x$ 上?

当 $pq = \frac{1}{2}$ 时，有 $\frac{1}{2q} = p$ 及 $\frac{1}{2p} = q$，所以 $P = (p, q)$、$Q = (q, p)$。曲线 $xy = \frac{1}{2}$ 在关于 $y = x$ 的反射下保持不变，而这个反射把 P 和 Q 互换。因此它把两条切线互换，也把两条法线互换，于是每个交点都被映射到自身；而被这个反射固定的点必定在 $y = x$ 上。代数计算正好印证了这一点。

T 与 N 在 $y=x$ 上，以及距离之积

由于 $2pq=1$，T 的结果给出

$$T=\left(\frac{1}{p+q},\frac{1}{p+q}\right),$$

它在 $y=x$ 上；而我们已求得 $N=(p+q,\,p+q)$，它同样在 $y=x$ 上。

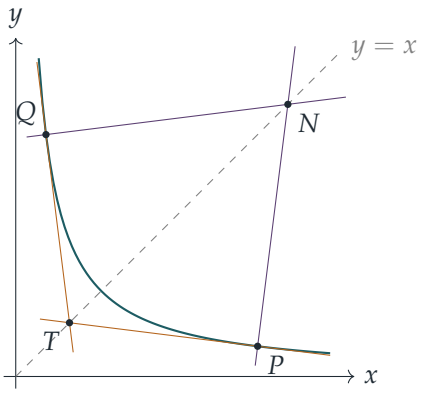
一点 (a,a)（其中 $a>0$）与原点的距离为 $\sqrt{2}\,a$。由于 $p+q>0$，

$$OT=\frac{\sqrt{2}}{p+q},\qquad ON=\sqrt{2}\,(p+q),$$

所以

$$OT\cdot ON=2,$$

这是常数（与 p 无关），正如所求。



图中显示 $p=2$、$q=\frac{1}{4}$ 的情况：琥珀色为切线，梅紫色为法线。

验算

取 $p=2$、$q=\frac{1}{4}$，则 $pq=\frac{1}{2}$。切线为 $x+8y=4$ 和 $8x+y=4$，交于 $\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$，与 $\frac{1}{p+q}=\frac{4}{9}$ 吻合。法线为 $y=8x-\frac{63}{4}$ 和 $y=\frac{x}{8}+\frac{63}{32}$，交于 $\left(\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right)$，与 $p+q=\frac{9}{4}$ 吻合。于是 $OT\cdot ON=\frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}=2$。我们亦以精确的有理数运算，对 2000 组随机选取的 p 和 q 验证了 T 的一般公式，以及特殊情况下的两个结果。

常见错误

- 除以 $p-q$ 时没有说明为何可以这样做：“相异的点”这个条件正是用在这里。

- 求 N 时，在 $\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p} = \frac{p-q}{2pq}$ 中弄错正负号。
- 在声称 T 位于 $y = x$ 上之前，忘记用 $pq = \frac{1}{2}$ 化简 T。

STEP 之外

直角双曲线（rectangular hyperbola）$xy = c^2$ 是一种圆锥曲线（conic）；而 $OT \cdot ON$ 为常数这一事实，说明了 T 和 N 是关于圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的反演点（inverse points）。关于圆的反演（inversion）是几何学以及复分析（complex analysis）中一种威力强大的变换；在复分析中，它以映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 的形式出现。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）对反演及其几何性质有精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。