详细解答

STEP I 2012，第 3 题

纯数学 · 由面积推导不等式

> **STEP I 2012，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q3

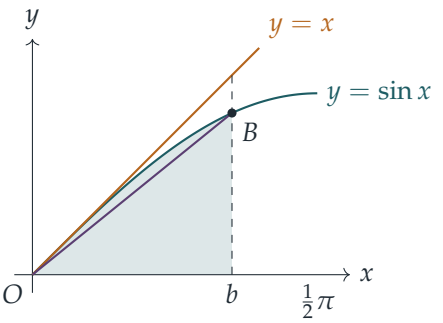
关键思路

一条始终朝同一方向弯曲的曲线，总是位于它每一条切线（tangent）的同一侧，并位于它每一条弦（chord）的另一侧。因此，曲线下的面积被夹在切线下的面积与弦下的面积之间，而这两个面积都不过是三角形或梯形（trapezium）的面积。把每个面积准确地写出来，不等式便自然得出；真正需要花心思的，只是决定该用哪一条切线和哪一条弦。

解答

第 (i) 部分

在 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 上，我们有 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$，所以曲线 $y = \sin x$ 在该区间上是凹（concave）的：它向下弯曲。原点处的切线斜率（gradient）为 $\cos 0 = 1$，所以切线就是直线 $y = x$。由 O 到 $B = (b, \sin b)$ 的弦是直线 $y = \dfrac{\sin b}{b}\,x$。



凹性的意思是：在 O 与 B 之间，曲线严格位于弦的上方；而当 $x > 0$ 时，曲线严格位于 O 处切线的下方。所以，当 $0 < x < b$ 时，

$$\frac{\sin b}{b}\, x \;<\; \sin x \;<\; x.$$

现在比较在 $0 \le x \le b$ 上的三个面积。

- 曲线下的面积（阴影部分）：$\displaystyle\int_0^b \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos b.$
- 切线下的面积：一个底为 b、高为 b 的直角三角形，面积为 $\frac{1}{2}b^2$。
- 弦下的面积：一个底为 b、高为 $\sin b$ 的三角形，面积为 $\frac{1}{2}b\sin b$。

由于在 $0 < x < b$ 上曲线严格位于两条直线之间（而且三者都是连续的），这些面积满足严格不等式：

$$\tfrac{1}{2}b\sin b \;<\; 1 - \cos b \;<\; \tfrac{1}{2}b^2.$$

右边的不等式可整理为 $\cos b > 1 - \frac{1}{2}b^2$，左边的则可整理为 $\cos b < 1 - \frac{1}{2}b\sin b$。合起来便得

$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 < \cos b < 1 - \tfrac{1}{2}b\sin b,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

设 $k = \ln a$；由于 $a > 1$，所以 $k > 0$，而且 $a^x = \mathrm{e}^{kx}$。于是

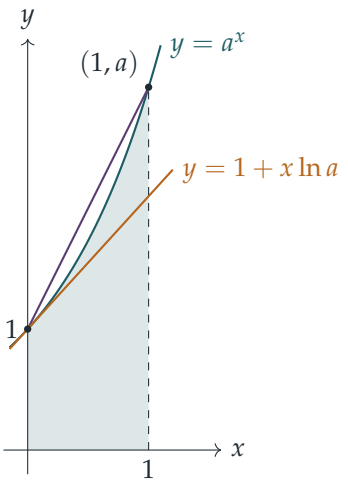
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = k\,\mathrm{e}^{kx}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a^x = k^2\mathrm{e}^{kx} > 0,$$

所以这条曲线是凸（convex）的：它向上弯曲。现在两者的角色对调：曲线严格位于它的弦的下方，并严格位于它的切线的上方（切点除外）。

想一想 我们应该在哪个区间上比较面积?

答案应该只涉及 $\ln a$ 和 a，而不涉及其他量。区间 $0 \le x \le 1$ 恰好做到这一点：曲线的两个端点是 $(0,1)$ 和 $(1,a)$，而曲线下的面积是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^k - 1}{k} = \frac{a-1}{\ln a}.$$



下界（弦）。由 $(0,1)$ 到 $(1,a)$ 的弦在 $0<x<1$ 上位于曲线上方，而它下方的区域是一个宽为 1、两条平行边分别为 1 和 a 的梯形，面积为 $\frac{1}{2}(1+a)$。因此

$$\frac{a-1}{\ln a}<\frac{a+1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \ln a>\frac{2(a-1)}{a+1},$$

这里我们两边同乘正数 $2\ln a/(a+1)$，所以不等号方向不变。

上界（切线）。$(0,1)$ 处的切线斜率为 $k=\ln a$，所以切线是 $y=1+kx$。当 $x>0$ 时它位于曲线下方，而它在 $[0,1]$ 上的下方面积是一个两条平行边分别为 1 和 $1+k$ 的梯形，面积为 $1+\frac{1}{2}k$。因此

$$1+\tfrac{1}{2}k<\frac{a-1}{k}.$$

两边乘以 $2k>0$：

$$2k+k^2<2a-2 \quad\Longleftrightarrow\quad k^2+2k+1<2a-1 \quad\Longleftrightarrow\quad (k+1)^2<2a-1.$$

? **想一想** 我们可以直接开平方吗?

可以，但只因为两边都是正数：$2a-1>1>0$，而且由于 $k>0$，所以 $k+1>0$。对正数而言，$u^2<v^2$ 可推出 $u<v$，所以 $k+1<\sqrt{2a-1}$，即

$$\frac{2(a-1)}{a+1}<\ln a<-1+\sqrt{2a-1},$$

证明完毕。

验算

- 第 (i) 部分取 $b=1$：$1-\frac{1}{2}=0.5$，$\cos 1\approx 0.5403$，而 $1-\frac{1}{2}\sin 1\approx 0.5793$。大小次序正如所述。

- 第 (ii) 部分取 $a = 2$：$\frac{2}{3} \approx 0.6667$，$\ln 2 \approx 0.6931$，而 $\sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$。次序同样正确。
- 当 $a \to 1$ 时，第 (ii) 部分的三个式子都趋于 0，而且彼此愈夹愈紧：在 $a = 1.01$ 时，它们准确至小数点后五位都相同。这很合理，因为在很短的范围内，一条光滑曲线几乎是直的。
- 我们在数以千计的随机值上验算了两串不等式，并用辛普森法则（Simpson's rule）验算了面积公式。

常见错误

- 把位置的上下弄反：正弦曲线是凹的（位于切线下方、弦上方），而 a^x 是凸的（情况相反）。应该用二阶导数（second derivative）而不是草图来证明这一点。
- 用 $\ln a$ 乘或除不等式时，忘记 $\ln a > 0$ 这一条件。
- 对 $(k+1)^2 < 2a - 1$ 开平方时，没有检查 $k + 1 > 0$。

STEP 之外

这些弦的界是一个一般原理的特例：对于凸函数，它在一个区间上的平均值介乎区间中点的函数值与两端点函数值的平均之间（这就是埃尔米特（Hermite）–阿达马（Hadamard）不等式；若改用中点处而非端点处的切线，便可得到更精确的下界）。第 (ii) 部分的下界说明，a 与 1 的对数平均（logarithmic mean）$(a-1)/\ln a$ 小于它们的算术平均（arithmetic mean）；这个事实在整个分析学以至物理学中都屡屡出现。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）对凸函数和积分估计有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。