详细解答

STEP I 2012，第 2 题

纯数学 · 曲线描绘与根

STEP I 2012，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s1-q2

关键思路

数 $p(x)=0$ 的实根（real roots）个数，等同于数 $y=p(x)$ 的图像与 x 轴相交多少次；又或者把常数项移到另一边之后，数一条固定曲线与一条水平直线相交多少次。因此整道题的关键在于掌握一条四次曲线（quartic）的形状：它在哪里转向，以及转向时有多高或多低。第 (i) 部分中，这个四次多项式是一个完全平方；第 (ii) 部分中，关于导数的条件令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以因式分解并带有一个重根（repeated root），结果只剩下一个转向点（turning point）。

解答

第 (i) 部分

首先留意

$$y=x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2,$$

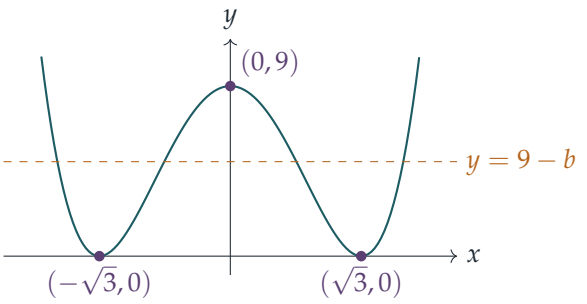
所以处处都有 $y\geq 0$，而且 $y=0$ 恰好在 $x=\pm\sqrt{3}$ 时成立。这条曲线是偶函数（even function）的图像（关于 y 轴对称），并在 $(0,9)$ 与 y 轴相交。求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^3-12x=4x(x^2-3),$$

它在 $x=0$ 及 $x=\pm\sqrt{3}$ 时等于零。因此驻点（stationary points）为

$$(0,9)\text{（局部极大值）}, \qquad (\sqrt{3},0)\text{ 及 }(-\sqrt{3},0)\text{（极小值）}.$$

极小值是显然的，因为 $y\geq 0$ 而在这两点 $y=0$；又 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=12x^2-12$ 在 $x=0$ 时等于 $-12<0$，所以该点是极大值。当 $x\to\pm\infty$ 时，$y\to+\infty$。这条曲线是一个“W”形，在 $x=\pm\sqrt{3}$ 处与 x 轴相切。



至于根的个数，在等式两边同时加上 9：

$$x^4 - 6x^2 + b = 0 \iff (x^2 - 3)^2 = 9 - b.$$

因此 n 就是水平直线 $y = 9 - b$ 与刚才所绘曲线的交点个数。让这条直线由高至低移动，从图中读出：

- $9 - b > 9$，即 $b < 0$：直线在极大值之上，只与外侧两支相交，所以 $n = 2$。
- $9 - b = 9$, 即 $b = 0$: 直线穿过极大值点, 得到 $x = 0$ 及外侧两点; 事实上 $x^2(x^2 - 6) = 0$ 给出 $x = 0, \pm\sqrt{6}$。所以 $n = 3$。
- $0 < 9 - b < 9$，即 $0 < b < 9$：直线与四段单调（monotonic）部分各相交一次，所以 $n = 4$。
- $9 - b = 0$，即 $b = 9$：直线只在两个极小值点 $x = \pm\sqrt{3}$ 处与曲线相切，所以 $n = 2$。
- $9 - b < 0$，即 $b > 9$：直线位于曲线下方，所以 $n = 0$。

综合以上：

(a) $n = 0 \iff b > 9$; (b) $n = 1$：不存在这样的b; (c) $n = 2 \iff b < 0$ 或$b = 9$;

(d) $n = 3 \iff b = 0$; (e) $n = 4 \iff 0 < b < 9$.

$n = 1$ 不可能出现，也可由对称性得出：若 x 是根，则 $-x$ 也是根，所以唯一的根必须是 $x = 0$，这迫使 $b = 0$，但此时共有三个根。

第 (ii) 部分

现在 $y = x^4 - 6x^2 + ax + b$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x + a, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12.$$

二阶导数只在 $x = \pm 1$ 时等于零。在 $x = 1$ 时一阶导数为 $a - 8$，在 $x = -1$ 时则为 $a + 8$。所以两者在同一点同时等于零，当且仅当

$$a = 8 \text{ (在}x = 1\text{)} \qquad \text{或} \qquad a = -8 \text{ (在}x = -1\text{)}.$$

情况 $a = 8$。此时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)^2(x+2),$$

我们之所以找到因式 $(x-1)^2$，是因为我们刻意令 $x = 1$ 同时是 y' 和 y'' 的根，即 y' 的重根。

> ? **想一想** 这条曲线实际上有多少个转向点?

由于 $(x-1)^2 \geq 0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的正负号与 $x+2$ 的正负号相同。所以 y 在 $x < -2$ 时严格递减，在 $x > -2$ 时严格递增（斜率在 $x = 1$ 时为零，但不变号：那是一个驻拐点（stationary point of inflection），而不是转向点）。曲线只有一个转向点，就是在 $x = -2$ 处的全局极小值（global minimum），其值为

$$y(-2) = 16 - 24 - 16 + b = b - 24.$$

一条先下降到唯一的极小值再上升的曲线，若极小值在 x 轴之下，便与 x 轴相交两次；若极小值刚好在轴上，便相交一次（相切）；若在轴之上，则完全不相交。因此相异实根的个数为

$$\begin{cases} 2 & \text{若} b < 24, \\ 1 & \text{若} b = 24, \\ 0 & \text{若} b > 24. \end{cases}$$

（当 $b = 24$ 时，可以直接看到重根：$x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$，而该二次式的判别式（discriminant）为 $16 - 24 < 0$。）

情况 $a = -8$。以 $-x$ 代替 x，可把 $x^4 - 6x^2 - 8x + b$ 变成 $x^4 - 6x^2 + 8x + b$，所以这条曲线是前一条曲线关于 y 轴的反射。唯一的极小值现在位于 $x = 2$，其值为 $b - 24$，而根的个数相同：$b < 24$ 时为 2，$b = 24$ 时为 1，$b > 24$ 时为 0。

第 (iii) 部分

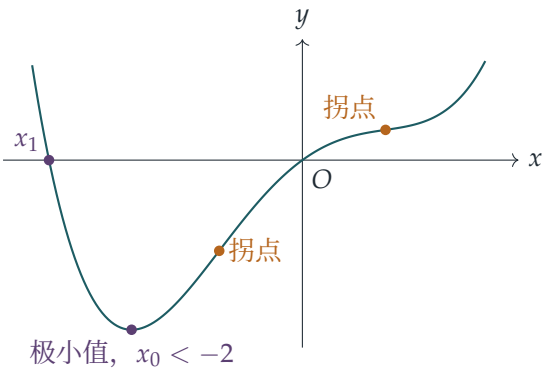
取 $y = x^4 - 6x^2 + ax$，其中 $a > 8$。

驻点。 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 即 $x^3 - 3x = -\frac{a}{4}$。三次函数 $g(x) = x^3 - 3x$ 有局部极大值 $g(-1) = 2$ 及局部极小值 $g(1) = -2$，而且 $g(-2) = -2$。由于 $-\frac{a}{4} < -2$，高度为 $-\frac{a}{4}$ 的水平直线位于 g 的局部极小值之下，所以它与 g 恰好相交一次，交点在 $x < -2$ 的左支上。因此恰好有一个驻点，位于某个 $x_0 < -2$。该点左边斜率为负，右边斜率为正，所以它是极小值。

与 x 轴的交点。 $y = x(x^3 - 6x + a)$，所以 $x = 0$ 是其中一个交点，其余交点是 $h(x) = x^3 - 6x + a$ 的根。这个三次函数在 $x = \sqrt{2}$ 处取局部极小值，而 $h(\sqrt{2}) = a - 4\sqrt{2} > 0$，因为 $a > 8 > 4\sqrt{2}$。所以 h 只有一个实根，又因 $h(0) = a > 0$，这个根是负数。事实上 $h(-2) = a + 4 > 0$，而 h 在 $x < -\sqrt{2}$ 时递增，所以这个根 x_1 满足 $x_1 < -2$。曲线在 x_1 和原点与 x 轴相交，两者之间曲线取负值；极小值就位于这个区间内。

其他特征。在原点处斜率为 $a > 0$。二阶导数 $12(x^2-1)$ 在 $x = \pm 1$ 处变号，所以在 $(-1, -a-5)$ 及 $(1, a-5)$ 有拐点（points of inflection）；这两点的斜率分别为 $a+8$ 及 $a-8$，均为正数，所以曲线经过这两点时仍在上升。曲线在 $-1 < x < 1$ 上向下凹（concave down），在此区间以外向上凹。当 $x \to \pm\infty$ 时，$y \to +\infty$。

下图展示 $a = 10$ 的情况，此时 $x_0 \approx -2.05$，极小值约为 -28，而 $x_1 \approx -3.05$。



验算

- 在第 (i) 部分，$b = 5$ 应给出四个根：$x^2 = 3 \pm 2$，所以 $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$。结果吻合。
- 在第 (ii) 部分，$b = 24$ 给出因式分解 $(x+2)^2(x^2-4x+6)$，证实在极小值处只有一个（二重）根。
- 数值上，我们对 0、9 及 24 两侧的许多 b 值求出这些四次多项式的全部复数根，并数出其中相异的实根；每一个结果都吻合。对于 8 与 200 之间的随机 a，第 (iii) 部分的曲线总是只有一个驻点及两个与 x 轴的交点，并且 $x_1 < x_0 < -2$。当 $a = 10$ 时，$x_0 \approx -2.054$，$y(x_0) \approx -28.05$。

常见错误

- 把 $x = \pm\sqrt{3}$ 处的重根（当 $b = 9$ 时）算作四个根：题目问的是相异的 x 值。
- 把第 (ii) 部分中 $y' = y'' = 0$ 的点当作转向点。由于 y' 在该处有一个平方因式，其正负号不会改变，所以它是驻拐点。
- 遗漏 $a = -8$：$y'' = 0$ 有两个解，每个解都给出一个 a 值。

STEP 之外

当 b 经过 0、9 或 24 时实根个数的跳变，是分岔（bifurcation）的一个小例子：只有当水平直线经过某个驻值时，答案才会改变。第 (ii) 部分中 $y' = y'' = 0$ 这个特殊情况，正是两个驻点合并并消失之处，这是最简单的“突变”（catastrophe），即折叠型突变（fold），也是为甚么一旦 $a > 8$，第 (iii) 部分的四次曲线便只有一个转向点。同样的推理，借助介值定理（intermediate value theorem）和单调性加以严格化，就是实分析（real analysis）的起点；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是看到这套推理被仔细展开的好地方。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。