详细解答

STEP I 2012，第 12 题

概率与统计 • 条件概率

STEP I 2012，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s1-q12

关键思路

一切取决于灭火筒在哪一年出现故障，所以先把概率密度函数（probability density function）化为累积分布函数（cumulative distribution function），从而读出故障在第一、第二及第三年出现的概率。一旦知道是哪一年，各次测试就只是一连串互相独立（independent）的“通过”，最后接一次“不通过”。最后一部分是条件概率（conditional probability），而“在 18 个月时已有故障”这个事件，同样是关于 T 落在哪个区间的陈述。

解答

T 的分布

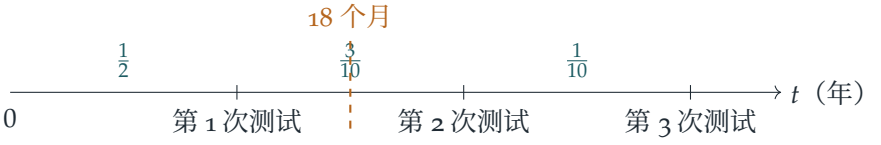
对 $t \geq 0$，代入 $u = 1 + s^2$（于是 $\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$），

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t \frac{2s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

所以 $F(1) = \frac{1}{2}$，$F(2) = \frac{4}{5}$，$F(3) = \frac{9}{10}$，而

$$\mathrm{P}(0 < T < 1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(1 < T < 2) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(2 < T < 3) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}.$$

由于 T 是连续（continuous）随机变量，故障恰好在测试当日出现的概率为零，所以不必担心端点处用的是 $<$ 还是 $\leq$。



恰好在制造后三年被销毁

设 D 为灭火筒在制造后三年的测试中被销毁这个事件。要发生这件事，灭火筒必须在第三次测试前已有故障（即 $T < 3$），在此之前处于故障状态时所接受的每次测试都必须通过，而第三次测试则必须不通过。没有故障的灭火筒必定通过测试，所以只有时间 T 之后的测试才有影响，而这些测试互相独立，每次不通过的概率为 p。

- 若 $0 < T < 1$：它在第 1、2、3 次测试时都有故障，所以必须通过、通过、不通过：概率为 $(1-p)^2 p$。
- 若 $1 < T < 2$：它自动通过第 1 次测试，然后必须通过第 2 次测试，并在第 3 次测试不通过：概率为 $(1-p)p$。
- 若 $2 < T < 3$：它自动通过第 1 及第 2 次测试，并必须在第 3 次测试不通过：概率为 p。

若 $T > 3$，它在第 3 次测试时并无故障，因此不会在那时被销毁。根据全概率定律（law of total probability），

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{3}{10}(1-p)p + \tfrac{1}{10}p \\ &= \frac{p}{10}\Big(5(1-2p+p^2) + 3(1-p) + 1\Big) \\ &= \frac{p\,(5p^2 - 13p + 9)}{10}, \end{aligned}$$

此即所求。

已知在三年时被销毁，求在 18 个月时已有故障的概率

设 E 为灭火筒在制造后 18 个月时已有故障这个事件，即 $T < \frac{3}{2}$。我们要求

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{\mathrm{P}(E \cap D)}{\mathrm{P}(D)}.$$

> **想一想** 区间 $(0, \frac{3}{2})$ 横跨了一次测试。我们该如何把它分拆?

对测试而言，重要的是故障在哪一年出现，所以把 E 分拆为 $0 < T < 1$ 和 $1 < T < \frac{3}{2}$。我们有 $F(\frac{3}{2}) = \dfrac{9/4}{13/4} = \dfrac{9}{13}$，所以

$$\mathrm{P}\big(1 < T < \tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{9}{13} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{26}.$$

已知 $0 < T < 1$ 时，D 的概率与之前一样是 $(1-p)^2 p$；已知 $1 < T < \frac{3}{2}$ 时，故障仍然在

第二年出现，所以 D 的概率是 $(1-p)p$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E\cap D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2p + \tfrac{5}{26}(1-p)p \\ &= \frac{p(1-p)}{26}\big(13(1-p)+5\big) = \frac{p(1-p)(18-13p)}{26}.\end{aligned}$$

除以 $\mathrm{P}(D)$（当 $0<p\le 1$ 时它是正数，因为 $5p^2-13p+9$ 的判别式（discriminant）为 $169-180<0$，故此式恒为正），因子 p 约去，得

$$\mathrm{P}(E\mid D) = \frac{10(1-p)(18-13p)}{26(5p^2-13p+9)} = \frac{5(1-p)(18-13p)}{13(5p^2-13p+9)}.$$

验算

- 当 $p=1$ 时，每个有故障的灭火筒都会在故障后的第一次测试中被销毁，所以在第 3 年被销毁即表示故障在 $(2,3)$ 内出现：$\mathrm{P}(D)=\frac{1}{10}$ 而 $\mathrm{P}(E\mid D)=0$。两条公式都吻合。
- 当 $p\to 0$ 时，$\mathrm{P}(E\mid D)\to\dfrac{5\cdot 18}{13\cdot 9}=\dfrac{10}{13}$，这正是 $\mathrm{P}(T<\frac{3}{2}\mid T<3)=\dfrac{9/13}{9/10}$：当测试几乎检测不到故障时，被销毁这件事除了 $T<3$ 之外，几乎没有告诉我们任何信息。
- 以 $p=0.4$ 对 10^6 个灭火筒进行模拟（simulation），得到 $\mathrm{P}(D)\approx 0.1838$（准确值 0.184）及 $\mathrm{P}(E\mid D)\approx 0.642$（准确值 $\frac{192}{299}\approx 0.642$）。

常见错误

- 忘记有故障的灭火筒在第三次测试不通过之前，必须先通过较早的测试。
- 在最后一部分把 $\mathrm{P}(T<\frac{3}{2})=\frac{9}{13}$ 当作单一整体使用：在第一年出现的故障与在第二年上半年出现的故障，所要经历的测试次数并不相同。

STEP 之外

这里的 T 是一个连续的寿命，但我们只能通过离散而不完美的检查来观察它。这正是生存分析（survival analysis）和可靠性理论（reliability theory）中区间设限（interval-censored）数据的情境，而最后一部分则是一次小型的贝叶斯更新（Bayesian update）：T 的先验分布（prior distribution）因观察到的一次失效而得到修正。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）涵盖了连续分布以及这类条件化的内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。