详细解答

STEP I 2012，第 11 题

力学 · 滑轮与摩擦力

STEP I 2012，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s1-q11

关键思路

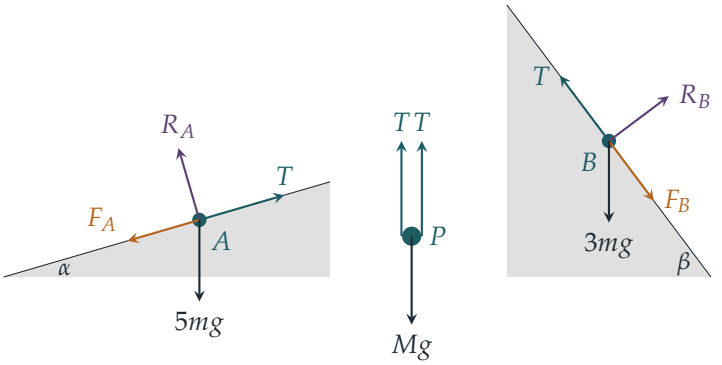
由于每个滑轮都是光滑（smooth）的，而绳子是轻（light）的，绳上各处的张力（tension）都相同。因此每个质点（particle）各给出一条把张力和摩擦力（friction）联系起来的方程，滑轮 P 则给出第三条。题中的角度取自 $7,24,25$ 和 $3,4,5$ 三角形，所以所有正弦和余弦都是准确的分数。至于运动的情况，我们还需要多一样东西：绳长固定如何把 A、B 和 P 的加速度联系起来。

解答

我们把 A、B 视为质点，把绳子视为轻而不可伸长（inextensible）的。滑轮 Q 和 R 光滑、轻且固定，而 P 光滑，质量为 M。设 $\alpha = \arctan\frac{7}{24}$ 及 $\beta = \arctan\frac{4}{3}$。由边长为 $7,24,25$ 和 $3,4,5$ 的直角三角形，

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

设 T 为张力。由于所有滑轮都光滑，每段绳子中的 T 都相同。



在两部分中，质点都是即将或正在沿斜面向上运动，所以摩擦力如图所示沿各斜面向下。沿垂直于斜面的方向分解（resolve），

$$R_A = 5mg\cos\alpha = \tfrac{24}{5}mg, \qquad R_B = 3mg\cos\beta = \tfrac{9}{5}mg.$$

第 (i) 部分

两个质点都即将滑动，所以摩擦力达到极限（limiting）：$F_A = \mu R_A$ 及 $F_B = \mu R_B$。沿各斜面分解（平衡）：

$$\begin{aligned} A: &\quad T = 5mg\sin\alpha + \mu R_A = \tfrac{mg}{5}(7+24\mu), \\ B: &\quad T = 3mg\sin\beta + \mu R_B = \tfrac{mg}{5}(12+9\mu). \end{aligned}$$

两式相等，得 $7+24\mu = 12+9\mu$，所以

$$\mu = \tfrac{1}{3},$$

于是 $T = \frac{mg}{5}(7+8) = 3mg$。

滑轮 P 处于平衡，有两段竖直的绳子把它向上拉，而其重量把它向下拉，所以

$$2T = Mg \quad\Longrightarrow\quad M = \frac{2\cdot 3mg}{g} = 6m,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

现在 $M = 9m$，比刚好能保持极限平衡（limiting equilibrium）的 $6m$ 更重，所以我们预期 P 会下降，并把两个质点沿各自的斜面向上拉。

? **想一想** 三个加速度之间有甚么关系？

设 A 和 B 沿各自斜面向上的加速度分别为 a 和 b，并设 P 向下的加速度为 p。绳长 $AQ+QP+PR+RB$ 固定不变。若 A 沿其斜面向上移动距离 x，B 沿其斜面向上移动距离 y，则 AQ 和 RB 分别缩短 x 和 y；若 P 下降 z，则 QP 和 PR 各伸长 z。因此在任何时刻都有 $2z=x+y$，求导两次，得

$$2p=a+b.$$

由于 $\mu=\frac{1}{3}$，向上滑动时 A 所受的摩擦力为 $\frac{1}{3}R_A=\frac{8}{5}mg$，$B$ 所受的为 $\frac{1}{3}R_B=\frac{3}{5}mg$。对两个质点沿各自斜面、对 P 沿竖直方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} A:&\quad T-\tfrac{7}{5}mg-\tfrac{8}{5}mg=5ma, && \text{故}T-3mg=5ma,\\ B:&\quad T-\tfrac{12}{5}mg-\tfrac{3}{5}mg=3mb, && \text{故}T-3mg=3mb,\\ P:&\quad 9mg-2T=9mp. \end{aligned}$$

设 $T=3mg+X$。于是 $a=\dfrac{X}{5m}$、$b=\dfrac{X}{3m}$，而绳子的条件给出

$$p=\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{4X}{15m}.$$

代入 P 的方程：

$$3mg-2X=\frac{12X}{5}\quad\Longrightarrow\quad X=\frac{15mg}{22}.$$

因此

$$a=\frac{3g}{22}\text{ 沿斜面向上},\qquad b=\frac{5g}{22}\text{ 沿斜面向上},\qquad p=\frac{2g}{11}\text{ 竖直向下},$$

而张力为 $T=\frac{81}{22}mg$。

想一想 我们怎样知道两个质点真的都向上运动，而不是其中一个保持不动？

由上面的方程可见，质点只有在 $T>3mg$ 时才会沿斜面向上滑动，而只有在 $T\le 3mg$ 时才会保持静止（或会向下滑）。两个质点的临界值同样是 $3mg$，所以要么两者都向上运动，要么两者都不向上运动。若两者都不向上运动，则 $a+b\le 0$，所以 $p\le 0$；但 $T\le 3mg$ 给出 $9mg-2T\ge 3mg>0$，迫使 $p>0$。这是矛盾，所以两者都向上运动，而我们的解（其中 $a,b>0$）是自洽的。

验算

- 在第 (i) 部分，把 $\mu=\frac{1}{3}$ 代入两个质点的方程，得出相同的张力 $3mg$。
- 在第 (ii) 部分，$2p=\frac{4g}{11}=\frac{3g}{22}+\frac{5g}{22}=a+b$，符合绳子的要求；而 $T=\frac{81}{22}mg\approx 3.68mg$ 介乎 $3mg$（滑动的临界值）与 $4.5mg$（P 没有加速度时的值）之间。
- 以数值模拟逐步推进三条运动方程，绳长在舍入误差范围内保持不变，且 $p\approx 0.182g$。

- 若 M 再次为 $6m$，同样的方法给出 $X = 0$，所以所有加速度都为零，与第 (i) 部分吻合。

常见错误

- 以为 $a = b = p$：滑轮 P 的移动速率是两个质点移动速率总和的一半，因为有两段绳子分担它的运动。
- 把摩擦力定为沿斜面向上：两个质点都正被拉向上，所以摩擦力与此相反，沿斜面向下。
- 忘记 P 上的两段绳子都带有张力 T，所以作用在它上面的向上力是 $2T$。

STEP 之外

关系式 $2p = a + b$ 是一个*约束*（constraint）：它把独立坐标的数目由三个减至两个。在大学一、二年级会学到的拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中，你会选取自动满足约束的坐标，从而根本不必求张力。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）通过约束方程仔细处理了许多滑轮系统，是通往这种观点的良好桥梁。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。