详细解答

STEP I 2012，第 10 题

力学 · 自由落体与声音

STEP I 2012，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s1-q10

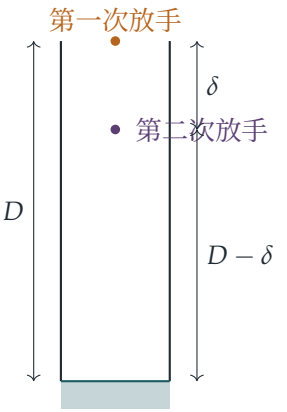
关键思路

每个量得的时间都由两部分组成：石头由静止开始自由下落的时间，以及水花声以等速传回上方的时间。把两次的时间都写出来再相减，便立即得到 t。至于“由此”（hence）部分，两个平方根正是两次的下落时间；我们知道它们的差，而它们的平方差又很简单，所以因式分解（factorisation）$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 便把它们的和也交到我们手上，于是两者都可以分别求出。

解答

t 的公式

我们把石头模型化为只受重力作用、由静止开始下落的质点（particle）（不计空气阻力（air resistance）），并假设声音以等速 u 沿井笔直向上传播。



由静止放下的石头在时间 τ 内下落距离 h，其中 $h = \frac{1}{2}g\tau^2$，所以 $\tau = \sqrt{2h/g}$。之后声音要走同样的距离 h 传回我这里，需时 h/u。所以从水面以上高度 h 处放下石头时，我量得的时间是

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u}.$$

从井口放下时，$h = D$；爬下去之后，我（以及石头的起点）位于水面以上高度 $D - \delta$ 处，而声音只需传到那里便会被我听到。因此

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{u}\right) - \left(\sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{D-\delta}{u}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2D}{g}} - \sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{\delta}{u}, \end{aligned}$$

得证。

D 的公式

记两次的下落时间为 $a = \sqrt{2D/g}$ 及 $b = \sqrt{2(D-\delta)/g}$。刚才证得的结果说明

$$a - b = t - \frac{\delta}{u} = \beta.$$

由于 $\delta > 0$，我们有 $a > b$，所以 $\beta > 0$；特别地，$\beta \neq 0$。此外

$$a^2 - b^2 = \frac{2D}{g} - \frac{2(D-\delta)}{g} = \frac{2\delta}{g}.$$

想一想 我们知道 $a - b$。怎样才能单独求出 a?

因式分解：$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \beta(a+b)$，而由于 β 是正数，我们可以除以 β。所以

$$a + b = \frac{2\delta}{\beta g}.$$

把此式与 $a - b = \beta$ 相加再除以二，得

$$a = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\delta}{\beta g} = T.$$

最后，$a = \sqrt{2D/g}$ 表示 $D = \frac{1}{2}ga^2$，所以

$$D = \tfrac{1}{2}gT^2,$$

得证。（所以 T 其实就是石头从井口下落整个深度所需的时间。）

数值情况

取 $u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$t = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$ 及 $\delta = 10\,\mathrm{m}$,

$$\beta = \frac{1}{5} - \frac{10}{300} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s},$$
$$T = \frac{1}{12} + \frac{10}{\frac{1}{6}\cdot 10} = \frac{1}{12} + 6 = \frac{73}{12}\,\mathrm{s},$$
$$D = \tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{73}{12}\right)^2 = \frac{5\times 5329}{144} = \frac{26645}{144} \approx 185.03\,\mathrm{m}.$$

所以这口井深约 185 m。

验算

- 把 $D = 26645/144$ 及 $\delta = 10$ 代回 t 的公式：两次下落时间分别是 $73/12 \approx 6.083\,\mathrm{s}$ 及 $\sqrt{2(175.03)/10} \approx 5.917\,\mathrm{s}$，相差 $1/6\,\mathrm{s}$，再加上 $\delta/u = 1/30\,\mathrm{s}$，恰好得到 $t = 0.2\,\mathrm{s}$。
- 若声音瞬间传到（$u \to \infty$），则 $\beta = t$，理应如此：只有下落时间才有影响。
- 以数值方法逐步模拟石头下落，再加上声音的延迟，可重现 t 的公式至 $10^{-4}\,\mathrm{s}$ 的精度；而反求公式 $D = \frac{1}{2}gT^2$ 在 10^4 个随机情况中都能还原 D。

常见错误

- 忘记了我爬下去之后声音只需传播 $D - \delta$，因而漏掉 δ/u 这一项。
- 试图直接把方程 $a - b = \beta$ 平方；这会导致繁琐的代数运算，而 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 只需一行便给出 $a + b$。
- 完全忽略声音：取 $\beta = t = 0.2$，同一方法会给出 $T = 5.1\,\mathrm{s}$ 及 $D \approx 130\,\mathrm{m}$，错得很远。

STEP 之外

这里所用的方法是一种*差分测量*（differential measurement）：我们不依赖单一次计时，而是比较两个相差已知量的实验，使未知量互相抵消。最后一个常见错误显示答案对数据的微小变化有多敏感，因为 t 是两个大时间之间的微小差；物理学家和工程师会用*误差传播*（error propagation）和*条件数*（condition number）来量化这种敏感度，这些内容会在大学一年级的实验方法及数值分析（numerical analysis）课程中学到。如想进一步了解如何仔细地为简单运动建立模型，可阅读 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。