详细解答

STEP I 2012，第 1 题

纯数学 · 以微积分求最优值

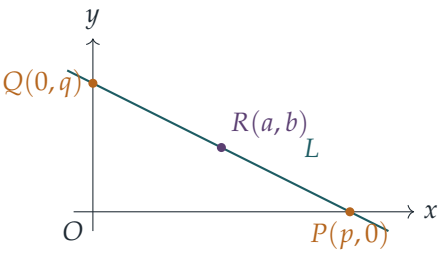
> **STEP I 2012，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q1

关键思路

一切都由一个数控制：斜率（gradient）。一旦规定 L 必须经过 R，截距（intercepts）p 和 q 便是 m 的简单函数（function），而两个要求最小化的距离也都变成只依赖 m 的函数。和 $p+q$ 可拆成一个常数加上形如 $am+b/m$ 的项，这正是算术－几何平均不等式（AM–GM）的典型用武之地（或者求一次导数也可以）。至于长度 PQ，留意到 $q=mp$ 会很有帮助，因为这样在求导之前 PQ^2 就能漂亮地因式分解。

解答

求 p 和 q



由于 $R(a,b)$ 在 $y=c-mx$ 上，我们有 $b=c-ma$，所以 $c=b+ma$。直线在 $x=0$ 处与 y 轴相交，所以 $q=c$；在 $y=0$ 处与 x 轴相交，所以 $p=c/m$（因为 $m>0$，这是可以的）。因此

$$p=a+\frac{b}{m}, \qquad q=b+ma.$$

对每个 $m > 0$，两者都是正数，符合题目要求。另外留意

$$q = b + ma = m\left(a + \frac{b}{m}\right) = mp,$$

这其实只是说 L 的斜率是 $-q/p$。下面会用到这一点。

最小化 $OP + OQ$

由于 $p, q > 0$，P 和 Q 到 O 的距离就是 p 和 q 本身，所以当 R 固定而 m 在 $m > 0$ 范围内变化时，我们要最小化

$$S(m) = p + q = a + b + \left(am + \frac{b}{m}\right).$$

括号内是两个正数之和，而它们的积 ab 与 m 无关。由算术－几何平均不等式，

$$am + \frac{b}{m} \geq 2\sqrt{am \cdot \frac{b}{m}} = 2\sqrt{ab},$$

等号成立当且仅当 $am = b/m$，即 $m = \sqrt{b/a}$（这是正数，所以这条直线是容许的）。因此

$$S(m) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2,$$

而且这个下界可以达到。所以距离之和的最小值是 $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2$，正如所求。

（如果你偏好用微积分：$S'(m) = a - b/m^2$，它只在 $m = \sqrt{b/a}$ 处为零，代入后得到相同的值。）

最小化 PQ

由毕氏定理（Pythagoras），并利用 $q = mp$，

$$PQ^2 = p^2 + q^2 = p^2(1 + m^2) = \left(a + \frac{b}{m}\right)^2 (1 + m^2).$$

由于 $PQ > 0$，最小化 PQ 等同于最小化 $f(m) = PQ^2$。用乘积法则（product rule）和链式法则（chain rule）求导，

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(-\frac{b}{m^2}\right)(1 + m^2) + 2m\left(a + \frac{b}{m}\right)^2 \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left[-\frac{b}{m^2} - b + am + b\right] \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(am - \frac{b}{m^2}\right). \end{aligned}$$

? **想一想** $-b$ 在哪里被抵消了？

在方括号内，$-\frac{b}{m^2}(1+m^2) = -\frac{b}{m^2} - b$，而 $m(a+\frac{b}{m}) = am + b$；两个 b 互相抵消。正是因为这个抵消，我们才把 PQ^2 写成 $p^2(1+m^2)$，而不是直接展开 p^2+q^2。

第一个因子是正数，所以 $f'(m) = 0$ 当且仅当 $am = b/m^2$，即 $m^3 = b/a$，得到唯一的驻点（stationary point）

$$m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

（题目说我们可以假设它是极小值；事实上，m 较小时 $f' < 0$，m 较大时 $f' > 0$，所以它是 $m > 0$ 上的全局最小值（global minimum）。）

现在代入。取这个 m，

$$a + \frac{b}{m} = a + b\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}), \qquad 1 + m^2 = 1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

因此

$$PQ^2 = a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^2 \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^3,$$

所以 P 与 Q 之间的最短距离是

$$PQ_{\min} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

这就是题目所要求的“相似形式”：第一个答案括号内的指数是 $\frac{1}{2}$、括号外是 2，这个则是括号内 $\frac{2}{3}$、括号外 $\frac{3}{2}$。

验算

- 对称性：交换 a 和 b（即对 $y = x$ 作反射）必须令两个最小值都不变，而事实确实如此。
- 数值例子：取 $a = 1$、$b = 8$。第二个结果预测 $m = 2$，得 $p = 5$、$q = 10$ 及 $PQ = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11.180$，而 $(1+4)^{3/2} = 5\sqrt{5}$，果然吻合。至于距离之和，$m = \sqrt{8}$ 给出 $p + q = 9 + 4\sqrt{2} \approx 14.657 = (1+2\sqrt{2})^2$。
- 我们对 2000 组随机的 (a, b)，把两个最小值与对 m 的暴力搜索结果比较；两者相差约 10^{-8}。

常见错误

- 把 p^2+q^2 完全展开再求导：这样做没有错，但很繁琐，而且容易看漏因子 $am - b/m^2$。先看出 $q = mp$ 可以省下大量功夫。
- 忘记最小化 PQ 与最小化 PQ^2 之所以等价，只是因为 $PQ > 0$；以及在化简 $a + b/m$ 时把分数指数弄错。

STEP 之外

第二个结果其实是经典的“梯子转角”问题的变身：$(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ 是能够水平地搬过宽度分别为 a 和 b 的两条走廊之间转角的最长梯子长度。长度固定的线段 PQ 所成的族的包络线（envelope）是一条星形线（astroid）$x^{2/3}+y^{2/3}=\ell^{2/3}$，而 R 恰好在包络线上，当且仅当 ℓ 等于这个最小值。包络线和约束最佳化（constrained optimisation）（以及之后的拉格朗日乘数（Lagrange multipliers））都会在大学一年级的微积分课程中出现；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多同类型的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。