详细解答

STEP III 2011，第 9 题

力学 • 圆柱上的运动

STEP III 2011，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

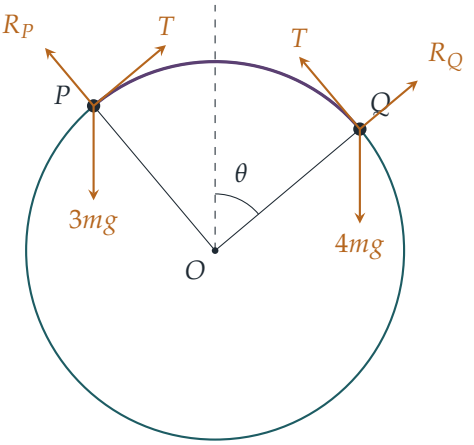
step.maths.org/questions/11-s3-q9

关键思路

长度为 $\frac{1}{2}\pi a$ 的绳子贴在圆柱面上，在 O 点所张的角是直角，因此 OP 与 OQ 始终互相垂直，整个系统只需一个坐标 θ 来描述。由能量守恒（conservation of energy）可直接得出 $\dot{\theta}^2$，再沿指向圆心的方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），便可把每个法向反作用力（normal reaction）以 $\dot{\theta}^2$ 表示。质点离开表面，即表示法向反作用力降至零。至于张力（tension），则用切向（tangential）方程：把两条方程相加可消去 T 并得出 $\ddot{\theta}$，之后任取其中一条便可求出 T。

解答

模型。P 和 Q 是质点 (particle), 绳子轻而不可伸长 (inextensible), 圆柱面光滑 (smooth)。轻绳绕过光滑表面时，各处张力同为 T。两质点之间的弧长为 $\frac{1}{2}\pi a$，所以 $\angle POQ = \frac{1}{2}\pi$。设 θ 为 OQ 与向上铅垂线所成的角，Q 位于最高点的一侧。那么 OP 在另一侧与向上铅垂线所成的角为 $\frac{1}{2}\pi - \theta$。只要两质点仍留在表面上，它们都在半径为 a 的圆上以角速率（angular speed）$\dot{\theta}$ 运动，因此各自的速率均为 $a\dot{\theta}$。



平衡。在每个质点处沿表面方向分解力（法向反作用力没有切向分量，而绳子沿切向拉向最高点）：对 Q 得 $T = 4mg\sin\theta$，对 P 得 $T = 3mg\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = 3mg\cos\theta$。因此在平衡（equilibrium）位置时 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，即 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 及 $\cos\theta = \frac{4}{5}$。

能量。取 O 所在高度为势能（potential energy）零点。Q 的高度为 $a\cos\theta$，P 的高度为 $a\cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = a\sin\theta$。法向反作用力不做功（它们与运动方向垂直），而张力对整个系统不做净功（绳子不可伸长），所以能量守恒。由于扰动轻微，系统由静止开始运动，故

$$\tfrac{1}{2}(3m + 4m)a^2\dot\theta^2 + 4mga\cos\theta + 3mga\sin\theta = 4mga\cdot\tfrac{4}{5} + 3mga\cdot\tfrac{3}{5} = 5mga.$$

两边乘以 $2/(ma)$，得

$$7a\dot\theta^2 + 8g\cos\theta + 6g\sin\theta = 10g,$$

此即所求。当 Q 向下移动时，θ 由 $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ 开始增大。

第 (i) 部分

Q 在半径为 a 的圆上以速率 $a\dot\theta$ 运动，所以它有指向 O 的加速度 $a\dot\theta^2$。其重量指向 O 的分量为 $4mg\cos\theta$，而 R_Q 向外作用。绳子沿切向，因此在径向上没有贡献。于是

$$4mg\cos\theta - R_Q = 4ma\dot\theta^2, \qquad \text{所以} \qquad R_Q = 4mg\cos\theta - 4ma\dot\theta^2.$$

当 R_Q 降至零，即 $a\dot\theta^2 = g\cos\theta$ 时，Q 离开表面。把此式代入 $\theta = \beta$ 时的能量方程：

$$7g\cos\beta + 8g\cos\beta + 6g\sin\beta = 10g \quad\Longrightarrow\quad 15\cos\beta + 6\sin\beta = 10,$$

此即所求。

> ? **想一想** 为甚么能量方程一直到 $\theta = \beta$ 仍然成立?

只要两个质点都留在圆柱面上,能量方程便成立,而题目告诉我们 Q 先离开。你也可以自行验证这一点。对 P 作同样的推导，得 $R_P = 3mg\sin\theta - 3ma\dot\theta^2$，它在 $13\sin\theta + 8\cos\theta = 10$ 时为零。在 $\beta \approx 73.6^\circ$ 时，左边约为 14.7，所以 R_P 仍然是正数。

第 (ii) 部分

现在沿切向分解力，以运动方向为正方向。Q 以切向加速度 $a\ddot{\theta}$ 远离最高点，而 P 以同样的切向加速度 $a\ddot{\theta}$ 移向最高点（绳子使两者速率保持相等）。对 Q 而言，重力有向前的分量 $4mg\sin\theta$，张力则向后拉：

$$4ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - T. \tag{1}$$

对 P 而言，张力把它向前拉，重力有向后的分量 $3mg\cos\theta$：

$$3ma\ddot{\theta} = T - 3mg\cos\theta. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相加可消去 T：

$$7ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - 3mg\cos\theta.$$

（这与把能量方程对时间求导再除以 $2\dot{\theta}$ 的结果一致。）代入 (1)：

$$\begin{aligned} T &= 4mg\sin\theta - 4ma\ddot{\theta} \\ &= 4mg\sin\theta - \tfrac{4}{7}m(4g\sin\theta - 3g\cos\theta) \\ &= \tfrac{12}{7}mg\sin\theta + \tfrac{12}{7}mg\cos\theta = \tfrac{12}{7}mg(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

此即所求。当 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 时此值为正，所以绳子在整个过程中都保持拉紧。

验算

- 在平衡位置时，$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$，所以 $T = \frac{12}{5}mg$。这与 $4mg\cdot\frac{3}{5}$ 及 $3mg\cdot\frac{4}{5}$ 相符。
- 写成 $15\cos\beta + 6\sin\beta = \sqrt{261}\cos(\beta - \alpha)$，其中 $\tan\alpha = \frac{2}{5}$，可得 $\beta \approx 1.2839$ 弧度 $\approx 73.56°$。我们从刚越过平衡位置之处开始以数值方法逐步模拟运动，发现 R_Q 正是在这个角度首次降至零，而 R_P 则保持为正。在整条路径上，能量关系式和张力公式在舍入误差范围内均成立。

常见错误

- 把 P 的高度当作 $a\cos\theta$ 而不是 $a\sin\theta$。绳长的设置，关键正在于直角 $\angle POQ$。
- 给两个质点不同的张力，或把 T 放进径向方程。绳子沿切向接触质点，所以 T 只出现在切向方程中。

STEP 之外

由于一个坐标 θ 便足以描述一切，这是一个单自由度（one degree of freedom）系统。拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）可以直接由动能和势能得出运动方程，完全不需要考虑约束力（forces of constraint）。法向反作用力和张力之后会以约束条件的“拉格朗日乘数”（Lagrange multipliers）的形式出现。在接触拉格朗日（Lagrange）的理论之前，Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是加深你对约束运动和能量方法理解的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。