详细解答

# STEP III 2011，第 8 题

纯数学 • 复数轨迹

**STEP III 2011，第 8 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q8

## 关键思路

将分子和分母同乘以分母的共轭（conjugate），便得到 $u$ 和 $v$；之后每一部分只需代入题目给出的直线，再认出一条熟悉的曲线。半角代换（half-angle substitution）把 $\frac{2x}{1+x^2}$ 和 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 变成正弦和余弦，这正是题目建议用它的原因。整个过程中，要时刻留意曲线上哪些点真正被取到：端点和缺失的点占了答案的一半。

## 解答

设 $z = x + \mathrm{i}y$。则 $1 + \mathrm{i}z = (1-y) + \mathrm{i}x$ 及 $\mathrm{i} + z = x + \mathrm{i}(1+y)$，因此把分子和分母同乘以 $x - \mathrm{i}(1+y)$，得

$$\begin{aligned} w &= \frac{((1-y)+\mathrm{i}x)(x-\mathrm{i}(1+y))}{x^2+(1+y)^2} \\ &= \frac{(1-y)x + x(1+y) + \mathrm{i}(x^2-(1-y)(1+y))}{x^2+(1+y)^2}. \end{aligned}$$

因此

$$u = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}, \qquad v = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(1+y)^2},$$

适用于 $z \neq -\mathrm{i}$（在该点 $w$ 无定义）。

知道逆映射（inverse map）亦很有帮助。由 $w(\mathrm{i}+z) = 1 + \mathrm{i}z$ 得 $z(w-\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}w$，所以

$$z = \frac{1-\mathrm{i}w}{w-\mathrm{i}}, \qquad w \neq \mathrm{i}.$$

因此每个 $w \neq \mathrm{i}$ 都恰好来自一个 $z$，而 $w = \mathrm{i}$ 永远取不到。这就是我们会一再遇到的那个缺失点。

### 第 (i) 部分

当 $y = 0$ 时，

$$u = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad v = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

令 $x = \tan(\theta/2)$。当 $x$ 取遍所有实数时，$\theta$ 取遍 $-\pi < \theta < \pi$，而每个 $x$ 恰好对应一个这样的 $\theta$。由半角公式，

$$u = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \sin\theta, \qquad v = -\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = -\cos\theta.$$

所以 $u^2+v^2 = 1$。此外，当 $-\pi < \theta < \pi$ 时，$(\sin\theta, -\cos\theta)$ 描出整个单位圆（unit circle），只缺 $\theta = \pm\pi$ 所对应的点，即 $(u,v) = (0,1)$。因此 $w$ 的轨迹（locus）是圆 $u^2+v^2 = 1$ 去掉单一点 $w = \mathrm{i}$，正如所求。（缺失点是 $x \to \pm\infty$ 时 $w$ 的极限。）

### 第 (ii) 部分

现在 $-1 < x < 1$，对应 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$。在此范围内 $v = -\cos\theta < 0$，而 $u = \sin\theta$ 由 $-1$ 递增至 $1$（不包括两端）。所以 $w$ 的轨迹是

$$u^2+v^2 = 1, \quad v < 0,$$

即单位圆的下半部分，不包括其端点 $w = \pm 1$（它们来自 $x = \pm 1$）。

### 第 (iii) 部分

当 $x = 0$ 时，得 $u = 0$ 及

$$v = \frac{y^2-1}{(1+y)^2} = \frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)^2} = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1},$$

由于 $y > -1$，约去 $y+1$ 是没有问题的。

> ? **想一想** 是否每个负的 $v$ 值都能取到，还是只取到其中一部分?

当 $y$ 由 $-1$ 增加至 $1$，$y+1$ 在 $(0,2)$ 中递增，所以 $\frac{2}{y+1}$ 在 $(1,\infty)$ 中递减，而 $v$ 则在 $(-\infty, 0)$ 中连续且严格递增。当 $y \to -1^+$ 时，$v \to -\infty$；当 $y \to 1^-$ 时，$v \to 0^-$。所以每个负的 $v$ 都恰好取到一次。$w$ 的轨迹是负虚轴

$$u = 0, \quad v < 0,$$

不包括原点（它来自 $y = 1$）。

**第 (iv) 部分**

当 $y = 1$ 时，

$$u = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad v = \frac{x^2}{x^2+4}.$$

于是

$$u^2 + v^2 = \frac{4x^2 + x^4}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+4} = v,$$

所以 $w$ 位于 $u^2 + v^2 = v$ 上，即

$$u^2 + (v - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4},$$

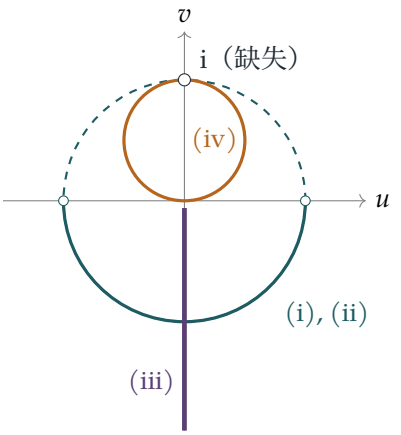
这是圆心为 $\frac{1}{2}\mathrm{i}$、半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆。

**想一想** 这个圆上哪些点真正被取到?

由于 $v = 1 - \frac{4}{x^2+4}$，我们有 $0 \le v < 1$，所以最高点 $w = \mathrm{i}$ 永远取不到。其余每一点都能取到：令 $x = 2\tan(\phi/2)$，其中 $-\pi < \phi < \pi$，得

$$u = \frac{\tan(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}\sin\phi, \qquad v = \frac{\tan^2(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\phi),$$

它绕整个圆一周，只缺 $\phi = \pm\pi$，即点 $(0,1)$。（另一种方法是用逆映射，它说明每个 $w \ne \mathrm{i}$ 都恰好来自一个 $z$。）所以轨迹是圆 $u^2 + v^2 = v$ 去掉点 $w = \mathrm{i}$。它在 $w = 0$ 与实轴相切，该点是 $z = \mathrm{i}$ 的像。




由虚线和实线组成的青色圆是实轴的像，即第 (i) 部分；实线的下半部分是第 (ii) 部分。紫红色射线是第 (iii) 部分，琥珀色圆是第 (iv) 部分。

## 验算

- $z = 0$ 给出 $w = 1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$：它既在下半圆 (ii) 上，也在射线 (iii) 上，而 $z = 0$ 确实同时位于这两段线上。
- $z = 1 + \mathrm{i}$ 给出 $w = \frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$，而 $0.4^2 + 0.2^2 = 0.2 = v$，所以它位于 (iv) 的圆上。
- 很大的实数 $z$：$w(10^8) \approx 2 \times 10^{-8} + \mathrm{i}$，趋近缺失点 i。
- 我们亦以数值方法对数以千计的随机点作了验证，既验证了 $u, v$ 的公式，也验证了每个所声称的轨迹上的每一点，都在正确的直线或线段上有原像（preimage）。

## 常见错误

- 只写出圆或半圆，却没有说明哪些点被去掉或不包括在内：这里是 (i) 和 (iv) 中的 $w = \mathrm{i}$，以及 (ii) 中的端点 $\pm 1$。
- 声称 (iii) 的轨迹是整条虚轴：对每个 $-1 < y < 1$，$v = \frac{y-1}{y+1}$ 都是负数。

## STEP 之外

这个映射是一个默比乌斯变换（Möbius transformation）；事实上 $w = \mathrm{i}\,\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$，所以 $|w| = |z-\mathrm{i}|/|z+\mathrm{i}|$，而它等于 1 当且仅当 $z$ 与 $\pm\mathrm{i}$ 等距，亦即当它是实数时。默比乌斯映射把直线和圆映成直线和圆（直线被视为“经过 $\infty$ 的圆”），而缺失点 i 正是 $\infty$ 的像。这个映射（即凯莱变换（Cayley transform））把上半平面映成单位圆盘，是复分析（complex analysis）和双曲几何（hyperbolic geometry）中的重要工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）以图像为主导，对默比乌斯变换有十分精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。