详细解答

STEP III 2011，第 7 题

纯数学 · 数学归纳法

STEP III 2011，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q7

关键思路

把 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ 平方，就能消去两个独立的平方根，剩下形如 $p+q\sqrt{a(a+1)}$ 的数；因此当 n 为偶数时，我们可以通过乘以 T_2，由 T_n 推进到 T_{n+2}。接着会发现，量 $A^2-a(a+1)B^2$ 在这个乘法下保持不变，而这正是归纳法（induction）所需要的。再多乘一个因子 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ 便能处理 n 为奇数的情况；而 (i) 和 (ii) 中的恒等式（identity）说明，两项分别是两个相邻整数的平方根。

解答

全文记 $N=a(a+1)$，于是 $\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}=\sqrt{N}$。

第 (i) 部分

基本情况（*base case*），$n=2$。展开得

$$T_2=(a+1)+2\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}+a=(2a+1)+2\sqrt{N},$$

所以 $A_2=2a+1$ 和 $B_2=2$ 都是整数，而且

$$A_2^2-NB_2^2=4a^2+4a+1-4a(a+1)=1.$$

归纳步骤（*inductive step*）。假设对某个偶数 $n\geq 2$，有 $T_n=A_n+B_n\sqrt{N}$，其中整数 A_n, B_n 满足 $A_n^2-NB_n^2=1$。为简便起见，记 $p=2a+1$，并注意 $p^2=4a^2+4a+1=4N+1$。

由于 $T_{n+2} = T_n T_2$，

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= (A_n + B_n\sqrt{N})(p + 2\sqrt{N}) \\ &= (pA_n + 2NB_n) + (2A_n + pB_n)\sqrt{N}. \end{aligned}$$

因此可取

$$A_{n+2} = pA_n + 2NB_n, \qquad B_{n+2} = 2A_n + pB_n,$$

由于 p、N、A_n 和 B_n 都是整数，它们也是整数。至于恒等式，交叉项 $\pm 4pNA_nB_n$ 互相抵消：

$$\begin{aligned} A_{n+2}^2 - NB_{n+2}^2 &= (p^2A_n^2 + 4pNA_nB_n + 4N^2B_n^2) - N(4A_n^2 + 4pA_nB_n + p^2B_n^2) \\ &= (p^2 - 4N)A_n^2 - N(p^2 - 4N)B_n^2 \\ &= A_n^2 - NB_n^2 = 1, \end{aligned}$$

这里先用了 $p^2 - 4N = 1$，再用归纳假设（inductive hypothesis）。所以命题对 $n+2$ 成立；由归纳法，命题对每个正偶数 n 都成立。

另外注意 $A_2, B_2 > 0$，而递推关系（recurrence）的系数都是正数，所以对每个偶数 n，都有 $A_n > 0$ 和 $B_n > 0$。第 (iii) 部分会用到这一点。

想一想 为甚么 $A^2 - NB^2$ 在乘以 T_2 之后仍然保持不变？

因为 $A^2 - NB^2 = (A + B\sqrt{N})(A - B\sqrt{N})$，而同样的计算显示，“共轭”（conjugate）$A - B\sqrt{N}$ 在每一步都被乘以 $p - 2\sqrt{N}$。因此两者之积每一步都被乘以 $(p + 2\sqrt{N})(p - 2\sqrt{N}) = p^2 - 4N = 1$。上面的代数运算只不过是把这个事实逐步写出来而已。

第 (ii) 部分

$n = 1$ 的情况。$T_1 = 1 \cdot \sqrt{a+1} + 1 \cdot \sqrt{a}$，所以 $C_1 = D_1 = 1$，且 $(a+1)C_1^2 = a + 1 = aD_1^2 + 1$。

$n \geq 3$ 为奇数的情况。此时 $m = n - 1$ 是正偶数，所以由第 (i) 部分，$T_m = A_m + B_m\sqrt{N}$，且 $A_m^2 - NB_m^2 = 1$。利用 $\sqrt{N}\sqrt{a+1} = (a+1)\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{N}\sqrt{a} = a\sqrt{a+1}$，

$$\begin{aligned} T_n = (\sqrt{a+1} + \sqrt{a})(A_m + B_m\sqrt{N}) &= A_m\sqrt{a+1} + A_m\sqrt{a} + (a+1)B_m\sqrt{a} + aB_m\sqrt{a+1} \\ &= (A_m + aB_m)\sqrt{a+1} + (A_m + (a+1)B_m)\sqrt{a}. \end{aligned}$$

所以 $C_n = A_m + aB_m$ 和 $D_n = A_m + (a+1)B_m$ 都是整数（而且是正数）。于是

$$\begin{aligned} (a+1)C_n^2 - aD_n^2 &= (a+1)(A_m^2 + 2aA_mB_m + a^2B_m^2) \\ &\quad - a(A_m^2 + 2(a+1)A_mB_m + (a+1)^2B_m^2) \\ &= A_m^2 + a(a+1)[a - (a+1)]B_m^2 \\ &= A_m^2 - NB_m^2 = 1, \end{aligned}$$

因为含 A_mB_m 的项互相抵消。因此 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$，得证。（$n=1$ 的情况其实是同一个计算，只是取 $T_0 = 1$，即 $A_0 = 1$、$B_0 = 0$。）

第 (iii) 部分

n 为偶数。由于 $A_n > 0$ 且 $B_n > 0$，

$$T_n = A_n + B_n\sqrt{N} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{NB_n^2},$$

而由第 (i) 部分，整数 NB_n^2 和 $A_n^2 = NB_n^2 + 1$ 是相邻的。

> ? **想一想** 为甚么我们需要知道 A_n 和 B_n 的正负号?

因为 $\sqrt{A^2} = |A|$，而不是 A。只有在知道 $A_n \geq 0$ 之后，写 $A_n = \sqrt{A_n^2}$ 才成立，这就是我们在第 (i) 部分记下正性的原因。

n 为奇数。由于 $C_n, D_n > 0$，

$$T_n = C_n\sqrt{a+1} + D_n\sqrt{a} = \sqrt{(a+1)C_n^2} + \sqrt{aD_n^2},$$

而由第 (ii) 部分，整数 aD_n^2 和 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$ 是相邻的。

所以对每个正整数 n，都存在某个正整数 k 使 $T_n = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$：具体而言，$n$ 为偶数时 $k = a(a+1)B_n^2$，n 为奇数时 $k = aD_n^2$。

验算

取 $a = 3$，则 $T_n = (2+\sqrt{3})^n$。于是 $T_2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{12} = \sqrt{49} + \sqrt{48}$，且 $49 = 12 \cdot 4 + 1$。接着，由 $A_2 = 7$、$B_2 = 2$ 得 $C_3 = 13$、$D_3 = 15$，以及 $T_3 = 26 + 15\sqrt{3} = \sqrt{676} + \sqrt{675} \approx 51.9808$，与直接计算 $(2+\sqrt{3})^3$ 的结果一致。我们用电脑对 $1 \leq a \leq 39$ 和 $n \leq 23$ 运行了递推关系，以整数运算准确验证了两条恒等式，并以数值方式验证了 T_n 的展开式。

常见错误

- 忘记基本情况，或者在第 (i) 部分只涉及偶数 n 的情况下，却从 $n = 1$ 开始归纳。
- 在第 (iii) 部分写 $A_n = \sqrt{A_n^2}$，却没有指出 A_n（以及 B_n、C_n、D_n）是正数。

STEP 之外

方程 $x^2 - Ny^2 = 1$ 就是佩尔方程（Pell's equation），而第 (i) 部分说明，$(2a+1) + 2\sqrt{a(a+1)}$ 的各次幂为 $N = a(a+1)$ 生成无限多组解。关键事实是：$x + y\sqrt{N}$ 的“范数”（norm）$x^2 - Ny^2$ 具有积性（multiplicative），这正是二次数域（quadratic number field）及其单位（unit）理论的起点。达文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）对佩尔方程和连分数（continued fraction）有非常易读的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。