详细解答

STEP III 2011，第 6 题

纯数学 · 积分代换

STEP III 2011，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q6

关键思路

题目不容许我们计算任何积分的值，所以可用的工具只有那些把一个积分变成另一个积分的方法：代换法（substitution）和分部积分法（integration by parts）。积分上下限就是线索。数 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 与 $\ln 2, \ln 3$ 由 $v = e^{-u}$ 联系起来，而 $\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\ln 3$ 则由 $t = e^{-2x}$ 与 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 联系起来。积分 T 和 V 的上下限相同，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2}$ 提示我们可以在两者之间用分部积分。三条联系已足以使四个积分全部相等。



解答

全文使用

$$\operatorname{artanh} t = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad (|t|<1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2},$$

特别地，$\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3$ 及 $\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 2$。所有被积函数（integrand）在其（闭且有界的）区间上都是连续的，因此每个积分都存在，下面的运算都是合理的。

$T = V$：分部积分

在 T 中，我们对 $\frac{1}{t}$ 积分、对 $\operatorname{artanh} t$ 求导，取 $u = \operatorname{artanh} t$ 及 $\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{t}$，于是 $w = \ln t$（由于在区间上 $t > 0$，这没有问题）：

$$\begin{aligned} T &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} + V, \end{aligned}$$

因为余下的积分正正就是 V（哑变量（dummy variable）用甚么名称并不重要）。

> **想一想** 边界项（boundary term）不会破坏等式吗?

它等于零，而这正是本题巧妙之处。在上限，$\ln\frac{1}{2}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = (-\ln 2)(\frac{1}{2}\ln 3)$；在下限，$\ln\frac{1}{3}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = (-\ln 3)(\frac{1}{2}\ln 2)$。两者都等于 $-\frac{1}{2}\ln 2\ln 3$，所以

$$\Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 + \tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 = 0,$$

因此 $T = V$。

$V = U$：代换 $v = e^{-u}$

设 $v = e^{-u}$，则 $\ln v = -u$ 及 $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$。当 $v = \frac{1}{3}$ 时，$u = \ln 3$；当 $v = \frac{1}{2}$ 时，$u = \ln 2$。于是

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{-u}{1-e^{-2u}}\left(-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（交换上下限）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{e^{u}-e^{-u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（分子分母同乘以 } e^{u}\text{）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{2\sinh u}\,\mathrm{d}u = U. \end{aligned}$$

$X = T$：代换 $t = e^{-2x}$

首先改写 X 的被积函数。对 $x > 0$，

$$\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}, \qquad \text{所以} \qquad \ln(\coth x) = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\operatorname{artanh}\left(e^{-2x}\right),$$

由于 $0 < e^{-2x} < 1$，此式成立。现设 $t = e^{-2x}$，则 $\mathrm{d}t = -2t\,\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$。当 $x = \frac{1}{2}\ln 2$ 时，$t = \frac{1}{2}$；当 $x = \frac{1}{2}\ln 3$ 时，$t = \frac{1}{3}$。因此

$$X = \int_{1/2}^{1/3} 2\operatorname{artanh} t\left(-\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\operatorname{artanh} t}{t}\,\mathrm{d}t = T.$$

结论

把三条联系合起来，得 $X = T = V = U$，所以四个积分全部相等，得证。我们始终无须求出任何一个积分的值。

验算

对每个积分分别使用辛普森法则（Simpson's rule），得 $T \approx U \approx V \approx X \approx 0.177704$，大约在小数点后 12 位都吻合。用计算机快速验证边界项为零也令人安心：$\ln \frac{1}{2} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{2}$ 和 $\ln \frac{1}{3} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{3}$ 的结果都是 $-0.3807\ldots$。

常见错误

- 在 $V = U$ 中漏掉负号：共有三个负号（V 前面的一个、$\ln v = -u$ 中的一个及 $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$ 中的一个），而交换上下限又带来第四个。
- 因为边界项看似不为零，便放弃分部积分，却没有在两端把它算出来。
- 写成 $\ln \coth x = \operatorname{artanh}(e^{-2x})$，漏掉了因子 2；这个因子稍后会被 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$ 中的 $\frac{1}{2}$ 抵消。

STEP 之外

把 $\operatorname{artanh} t/t$ 展开成幂级数（power series），可见这个共同值等于 $\chi_2(\frac{1}{2}) - \chi_2(\frac{1}{3})$，其中 $\chi_2(z) = \sum_{k\geq 0} z^{2k+1}/(2k+1)^2$ 是勒让德（Legendre）chi 函数，与双对数函数（dilogarithm）$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ 关系密切。这些函数的许多恒等式，正是来自这类变量代换。不计算任何一个积分而证明两个积分相等，是数学分析（analysis）中的标准技巧；而支持代换法和分部积分法的定理（连续性（continuity）、微积分基本定理（fundamental theorem of calculus））会在第一门分析课程中得到严格的表述。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是看这些定理被仔细证明的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。