详细解答

STEP III 2011，第 5 题

纯数学 · 以积分求面积

STEP III 2011，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q5

本题在 *Beyond STEP* 第 4.9 节 *Holditch* 定理中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/holditch.html

关键思路

直角坐标（cartesian）公式 $(*)$ 之所以有用，是因为它是双线性（bilinear）的：若 A 是 P 平移一个只依赖 t 的向量所得，那么 OA 扫过的面积可拆成三部分：OP 扫过的面积、单由平移产生的面积，以及一个交叉项（cross term）。这根杆正好给出这类平移，即 $\mp$ 单位向量（unit vector）$(\cos t, \sin t)$ 的某个倍数。交叉项 f 看似无从计算，但我们根本不需要算它：A 和 B 都沿同一条曲线 $\mathcal{C}$ 走一圈，所以 $[A] = [B]$，而这条等式就确定了 f。

解答

面积公式

设 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$，其中 r 和 θ 都是 t 的函数（function），由乘积法则（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta},$$

其中上方的点表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$。于是

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\dot{\theta} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

因为含 $r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$ 的项互相抵消。把积分（integral）变量由 θ 换成 t，

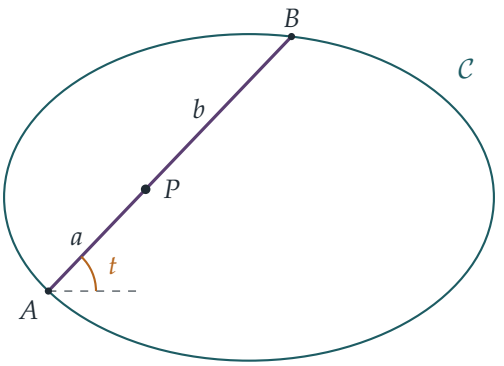
$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\int r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

这正是 $(*)$。

A 和 B 的坐标

杆的方向是单位向量 $\mathbf{u} = (\cos t, \sin t)$，由 A 指向 B，而 P 位于两者之间，且 $AP = a$、$PB = b$。所以 A 是 $P - a\mathbf{u}$，B 是 $P + b\mathbf{u}$：

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$



OA 扫过的面积

同样以点表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$。对 A 有

$$x_A = x - a\cos t, \quad \dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t, \qquad y_A = y - a\sin t, \quad \dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t.$$

展开得

$$x_A\dot{y}_A = x\dot{y} - a\cos t\,(x + \dot{y}) + a^2\cos^2 t,$$
$$y_A\dot{x}_A = y\dot{x} + a\sin t\,(y - \dot{x}) - a^2\sin^2 t,$$

所以

$$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A = (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2 - a\Big[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t\Big].$$

现在以 t 由 0 至 2π 应用 $(*)$。第一个括号给出 $[P]$，常数 a^2 给出 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi a^2 = \pi a^2$，而根据 f 的定义，最后一项给出 $-af$。因此

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af,$$

即为所求。

对 B 而言，唯一的改变是处处把 $-a$ 换成 $+b$（即在上面的推导中以 $-b$ 代替 a）。所以

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 之间的面积

想一想 $[A]$、$[B]$ 和 $[P]$ 实际上等于甚么?

当 t 由 0 变到 2π，杆转了整整一圈。两个端点都沿 $\mathcal{C}$ 逆时针走一圈，并回到起点：转了半圈时，A 和 B 互换位置；转了一整圈后，两者都回到原位。原点位于 $\mathcal{D}$ 之内，因此也位于 $\mathcal{C}$ 之内。所以 OA 和 OB 各自恰好扫过 $\mathcal{C}$ 所围的区域一次，而 OP 扫过 $\mathcal{D}$ 所围的区域一次。以 $|\mathcal{C}|$ 和 $|\mathcal{D}|$ 表示这两个面积，

$$[A] = [B] = |\mathcal{C}|, \qquad [P] = |\mathcal{D}|.$$

令 $[A] = [B]$，便可消去 $[P]$：

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad (a+b)f = \pi(a^2 - b^2) = \pi(a-b)(a+b).$$

由于 $a + b > 0$（它是杆的长度），可以两边相除，得 $f = \pi(a - b)$。因此

$$|\mathcal{C}| - |\mathcal{D}| = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab.$$

所以两曲线之间的面积是 πab。改用 $[B]$ 计算，同样得到 $\pi b^2 + b\pi(a-b) = \pi ab$，这是一个令人安心的一致性检查。

验算

- 圆形。若 $\mathcal{C}$ 是半径为 R 的圆,长度为 $a+b$ 的弦与圆心的距离恒为 $d = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2}$。由毕氏定理（Pythagoras），$P$ 与圆心的距离是 $\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$，所以 $\mathcal{D}$ 是一个同心圆（concentric circle），其半径的平方为 $R^2 - ab$。两者之间的面积是 $\pi R^2 - \pi(R^2 - ab) = \pi ab$。
- 对称性。答案关于 a 和 b 对称，这是必然的，因为把杆倒转便会互换两者的角色。
- 数值验证。我们让一根 $a = 1$、$b = 1.5$ 的杆沿椭圆 $x^2/16 + y^2/9 = 1$ 移动，并用鞋带公式（shoelace formula）计算所描出曲线的面积。两曲线之间的面积算得 4.712390, 与 $\pi ab = 1.5\pi \approx 4.712389$ 吻合。我们亦对随机选取的曲线 $P(t)$,用数值积分（quadrature）验证了 $[A]$ 和 $[B]$ 的恒等式。

常见错误

- 把 $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$ 的正负号弄错。对 $-a\cos t$ 求导得 $+a\sin t$。
- 试图直接计算 f。它取决于 $\mathcal{D}$ 的形状，没有更多资料便无法算出。关键在于 $[A] = [B]$ 就能确定它。

STEP 之外

这就是 Holditch 定理（Holditch's theorem，1858 年）：$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 之间的面积只取决于 a 和 b，而与 $\mathcal{C}$ 的形状无关。公式 $(*)$ 是格林定理（Green's theorem）的特例，该定理把区域上的面积分转化为沿其边界的线积分。它也是求积仪（planimeter）背后的原理；求积仪是一种沿边界描画来量度面积的机械装置。格林定理是大学一年级向量微积分（vector calculus）的核心内容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）对这类边界积分给出了优美的几何观点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。