详细解答

STEP III 2011，第 4 题

纯数学 · 杨氏不等式

STEP III 2011，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 3.4 节以面积证明不等式中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/areas-inequalities.html

关键思路

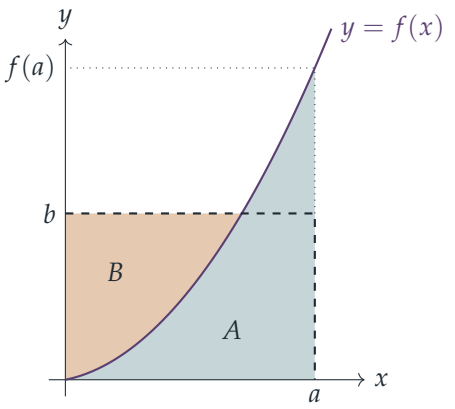
$(*)$ 中的两个积分（integral）都是同一幅图上的面积：$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲线与 x 轴之间的面积，而 $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 是曲线与 y 轴之间的面积。两者合起来总能覆盖以 $(0,0)$ 和 (a,b) 为顶角的矩形，而且除非顶角 (a,b) 刚好落在曲线上，否则还会有剩余。这样一来，第 (ii) 和第 (iii) 部分只不过是选取适当的 f，再计算两个积分而已。

解答

第 (i) 部分

由于 f 连续（continuous）且斜率（gradient）为正，它是严格递增（strictly increasing）的，因此反函数（inverse function）f^{-1} 存在，而且同样递增；又 $f(0)=0$ 表示曲线 $y=f(x)$ 从原点出发。

设 A 为 $0\le x\le a$ 范围内曲线与 x 轴之间的区域，其面积为 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$。设 B 为 $0\le y\le b$ 范围内曲线与 y 轴之间的区域；对 y 积分，其面积为 $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$。这两个区域位于曲线的两侧，所以不会重叠。



先假设 $b \le f(a)$，如图所示。矩形 $0 \le x \le a$、$0 \le y \le b$ 中的每一点，要么位于曲线上或其下方（因而属于 A），要么位于曲线上或其左方（因而属于 B）。所以 A 和 B 合起来覆盖了面积为 ab 的矩形，$(*)$ 成立。多出的部分是 A 中位于直线 $y = b$ 以上的部分，即 $f^{-1}(b) \le x \le a$ 范围内夹在该直线与曲线之间的狭长区域。

若改为 $b \ge f(a)$，只需把两者的角色对调，同样的论证仍然成立：矩形被覆盖，而这次多出的部分是 B 中位于直线 $x = a$ 右方的部分。

因此 $(*)$ 在所有情况下都成立，而等号成立需要多出部分的面积为零。当 $a, b > 0$ 且 $b \ne f(a)$ 时，多出的部分由曲线和一条直线围成，两者只在一端相交，所以其面积为正。因此，对于 $a > 0$ 及 $b > 0$，

$$\text{等号成立当且仅当} b = f(a),$$

即矩形的顶角 (a, b) 落在曲线上的时候。

第 (ii) 部分

当 $p > 1$ 时，$f(x) = x^{p-1}$ 在 $x \ge 0$ 上连续，$f(0) = 0$，并在该范围内严格递增，所以 $(*)$ 适用。（其斜率 $(p-1)x^{p-2}$ 在 $x > 0$ 时为正；若 $p < 2$，斜率在 0 处趋于无穷大，但这不影响面积的论证。）其反函数为 $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$。

条件 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 给出 $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$，所以

$$q = \frac{p}{p-1}, \qquad \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

于是 $f^{-1}(y) = y^{q-1}$，而两个积分分别为

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y = \frac{b^q}{q}.$$

代入 $(*)$ 得

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

即为所求。

? **想一想** 等号条件 $b = f(a)$ 在这里代表甚么？又应如何化简 b^q?

条件是 $b = a^{p-1}$。由于 $(p-1)q = p$，故 $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$。所以

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p = a \cdot a^{p-1} = ab,$$

等号确实成立。

第 (iii) 部分

取 $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$ 上的 $f(x) = \sin x$。它是连续的，$f(0) = 0$，而其斜率 $\cos x$ 在 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 时为正，所以它严格递增（斜率只在端点处为零，这不影响论证）。它把 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 映射到 $[0,1]$ 上，反函数为 arcsin，而这正好是 a 和 b 容许的取值范围。

第一个积分是

$$\int_0^a \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos a.$$

至于第二个积分，取 $u = \arcsin y$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y$，用分部积分法（integration by parts）：

$$\begin{aligned}\int_0^b \arcsin y \,\mathrm{d}y &= \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= b \arcsin b + \Big[\sqrt{1-y^2}\Big]_0^b \\ &= b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.\end{aligned}$$

两者相加，两个 1 互相抵消，$(*)$ 变成

$$ab \le b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a,$$

这就是所求的不等式（inequality），等号在 $b = \sin a$ 时成立。

? **想一想** a 可以自由选取。选哪一个值才能得到我们想要的不等式?

对于 $t \ge 1$，令 $b = t^{-1}$，它按要求落在 $(0,1]$ 内。把不等式乘以 $t > 0$，并利用 $t\sqrt{1-t^{-2}} = \sqrt{t^2-1}$（因为 $t > 0$，此式成立），得

$$a \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t\cos a \quad \text{对所有} a \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

目标不等式中没有 a，而右方有一个 t，这正是 $t\cos a$ 在 $a = 0$ 时的值。取 $a = 0$:

$$0 \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t, \qquad \text{即} \qquad \arcsin(t^{-1}) \ge t - \sqrt{t^2-1} \quad (t \ge 1).$$

验算

- 当 $t = 1$ 时，最后的不等式变成 $\frac{1}{2}\pi \geq 1$；当 $t = 2$ 时，则变成 $\frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 \geq 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$。
- 当 $t \to \infty$ 时，两边都是 $\frac{1}{t}$ 的量级：$\arcsin(t^{-1}) \approx t^{-1} + \frac{1}{6}t^{-3}$，而 $t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \approx \frac{1}{2t}$。所以这个下界约为真实值的一半。
- 我们在 2×10^5 个随机点 (a, b) 上测试了第 (iii) 部分的不等式；它从未失效，而两边的差距只在曲线 $b = \sin a$ 附近才缩小至零。我们亦以随机的 p、a 和 b 验证了杨氏不等式（Young's inequality），并用辛普森法则（Simpson's rule）核对了两个积分。

常见错误

- 在第 (i) 部分只画出 $b \leq f(a)$ 的情况。$b \geq f(a)$ 的情况是对称的，但你应该明确指出这一点。
- 写出 $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ 之后，没有察觉 $1/(p-1) = q - 1$，以致得不出积分 b^q/q。
- 在最后一步中，试图寻找使界限最佳的 a。那个 a 是 $\arcsin(t^{-1})$，但它只会给出一个平凡的恒等式。最简单的选择 $a = 0$ 才是行得通的那一个。

STEP 之外

第 (ii) 部分就是杨氏不等式,它是推导赫尔德(Hölder)不等式 $\sum |x_i y_i| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}$ 的标准途径，而赫尔德不等式又是分析学中 L^p 空间（L^p spaces）的基础。把 $\int f$ 与 $\int f^{-1}$ 配对的做法，正是勒让德变换（Legendre transform）和凸对偶（convex duality）的雏形，这些概念在力学（由拉格朗日量（Lagrangian）过渡到哈密顿量（Hamiltonian））和最佳化（optimisation）中都会再次出现。有关分析学的背景知识，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。