详细解答

STEP III 2011，第 3 题

纯数学 · 解三次方程

> **STEP III 2011，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q3

关键思路

两个立方 $(x-\alpha)^3$ 和 $(x-\beta)^3$ 为我们提供两个可自由选取的常数 a 和 b，而一个没有 x^2 项的首一三次多项式（monic cubic）要符合四个条件。因此我们用其中两个条件求出 a 和 b，其余两个条件就必须恰好是二次方程所给出、关于 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 的事实。一旦把三次式写成两个立方之和（sum of two cubes），令它等于零便化为“某个比的立方等于一个常数”，只要取立方根（cube root）便可解出，而且三个立方根都要取。

解答

把三次式写成两个立方之和

由于 $p\neq 0$，二次方程 $pt^2-qt+p^2=0$ 满足

$$\alpha+\beta=\frac{q}{p},\qquad \alpha\beta=\frac{p^2}{p}=p,$$

而其判别式（discriminant）为 q^2-4p^3。因此条件 $q^2\neq 4p^3$ 正好表示 $\alpha\neq\beta$。此外 $\alpha\beta=p\neq 0$，故两个根都不为零。

展开得

$$a(x-\alpha)^3+b(x-\beta)^3=(a+b)x^3-3(a\alpha+b\beta)x^2+3(a\alpha^2+b\beta^2)x-(a\alpha^3+b\beta^3).$$

要与 $x^3-3px+q$ 的系数相符，我们需要

$$a+b=1,\qquad a\alpha+b\beta=0,\qquad a\alpha^2+b\beta^2=-p,\qquad a\alpha^3+b\beta^3=-q.$$

头两条是 a 和 b 的线性方程。把 $b=1-a$ 代入第二条，得 $a(\alpha-\beta)=-\beta$；由于 $\alpha\neq\beta$，

可以两边相除：

$$a = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

现在验证其余两个条件会自动成立：

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta = -p,$$

$$a\alpha^3 + b\beta^3 = \frac{\beta\alpha^3 - \alpha\beta^3}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta(\alpha + \beta) = -p \cdot \frac{q}{p} = -q.$$

所以，取这两个 a 和 b 的值，

$$x^3 - 3px + q = \frac{\beta}{\beta - \alpha}(x - \alpha)^3 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(x - \beta)^3,$$

此即所求。

解 $x^3 - 24x + 48 = 0$

这里 $p = 8$、$q = 48$，而 $q^2 = 2304 \neq 2048 = 4p^3$，所以上述结果适用。对应的二次方程是 $8t^2 - 48t + 64 = 0$，即 $t^2 - 6t + 8 = 0$，其根为 2 和 4。取 $\alpha = 2$、$\beta = 4$；则 $a = 2$、$b = -1$，于是

$$x^3 - 24x + 48 = 2(x - 2)^3 - (x - 4)^3.$$

（快速展开即可确认：$2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64$。）

? **想一想** 我们怎样把 $2(x - 2)^3 = (x - 4)^3$ 变成可以求解的形式?

两边除以 $(x - 4)^3$。这样做是容许的，因为 $x = 4$ 不是根（$64 - 96 + 48 = 16$）。方程变成

$$\left(\frac{x - 2}{x - 4}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

记 $c = 2^{1/3}$。立方等于 $\frac{1}{2}$ 的复数为 $k = c^{-1}$、$c^{-1}\omega$ 和 $c^{-1}\omega^2$。对每一个值，解 $\dfrac{x - 2}{x - 4} = k$：

$$x - 2 = kx - 4k \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 - 4k}{1 - k},$$

由于 $k \neq 1$，这一步是成立的。映射 $k \mapsto x$ 是一一对应（one-to-one）的，所以 k 的三个值给出三个不同的根，它们必然就是该三次方程的全部根。

当 $k = c^{-1}$ 时，分子分母同乘以 c：

$$x = \frac{2c - 4}{c - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3})}{1 - 2^{1/3}},$$

这正是题目所给的解。当 $k = c^{-1}\omega$ 时，分子分母同乘以 $c\,\omega^{-1} = c\,\omega^2$（利用 $\omega^3 = 1$）：

$$x = \frac{2c\omega^2 - 4}{c\omega^2 - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega^2)}{1 - 2^{1/3}\omega^2},$$

同理，$k = c^{-1}\omega^2$ 给出

$$x = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega)}{1 - 2^{1/3}\omega}.$$

所以三个解为 $x = \dfrac{2(2 - 2^{1/3}\omega^j)}{1 - 2^{1/3}\omega^j}$，其中 $j = 0, 1, 2$。

$p = r^2$、$q = 2r^3$ 的情况

此时 $q^2 = 4r^6 = 4p^3$，正是上述方法所排除的情况：二次式 $r^2t^2 - 2r^3t + r^4 = r^2(t - r)^2$ 有重根（repeated root）$t = r$，我们无法求出 a 和 b。不过，二次方程有重根，暗示三次方程也有重根。事实上，代入 $x = r$ 得 $r^3 - 3r^3 + 2r^3 = 0$，而导数（derivative）$3x^2 - 3r^2$ 在 $x = r$ 处亦为零，所以 $(x - r)^2$ 是一个因式。比较 x^3 项和常数项，得

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^2(x + 2r).$$

根为 $x = r$（二重根）和 $x = -2r$。

想一想 我们能否从先前的公式得出这些根?

不能。当 $\alpha = \beta$ 时，两个立方合而为一，所以 $a(x - \alpha)^3 + b(x - \alpha)^3$ 只可能是 $(x - \alpha)^3$，它没有 x 项可与 $-3px$ 相配。这就是我们需要另一种方法的原因。把三次式写成 $(x - r)$ 的幂，便可看出实际情况：$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^3 + 3r(x - r)^2$，所以二重根正好位于二次方程的重根 $t = r$ 处。

验算

- 实根为 $2(2 - 1.259921)/(1 - 1.259921) \approx -5.694644$，代入后得 $x^3 - 24x + 48 \approx 0$，误差约为 10^{-13}。另外两个根为 $2.847322 \pm 0.567212\,\mathrm{i}$，残差同样为零。
- 三个根之和为 0（因为没有 x^2 项），积为 -48：$-5.694644 \times (2.847322^2 + 0.567212^2) \approx -48.0$。
- 一个实根加两个复根，与理论相符：$x^3 - 3px + q$ 只有在 $q^2 < 4p^3$ 时才有三个实根，而这里 $q^2 > 4p^3$。
- 该恒等式（identity）可以用数值检验：我们对 2000 组随机的 (p, q)，在随机复数 x 处作了检验，并对多个 r 值检验了因式分解 $(x - r)^2(x + 2r)$。

常见错误

- 只取 $\frac{1}{2}$ 的实立方根，因而只找到一个解。三次方程有三个根，它们分别来自三个立方根。

- 搞错 a、b 各自对应哪个根：a（即 $(x-\alpha)^3$ 的系数）的分子是 β。
- 在消去分母时把 ω 和 ω^2 对调。由于这两个答案是一对共轭（conjugate pair），无论哪种做法，最终得到的根集合都相同。

STEP 之外

这是十六世纪解三次方程方法的一个版本，通常归功于卡尔达诺（Cardano）和塔尔塔利亚（Tartaglia）：先化为没有 x^2 项的“缺项”三次方程（depressed cubic），再解一个辅助二次方程（即预解式（resolvent））。伽罗瓦理论（Galois theory）解释了为何三次和四次方程有这样的预解式，而一般的五次方程却没有。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）为通往这些概念提供了一条易读的路径。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。