详细解答

STEP III 2011，第 2 题

纯数学 · 多项式的有理根

STEP III 2011，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q2

关键思路

将 $\mathrm{f}(p/q)=0$ 乘以 q^{n-1}，除了一个分母外，其余分母全部消去：首项变成 p^n/q，而其余各项都是整数。因此 p^n/q 必须是整数；由于 p 与 q 没有公因数，这就迫使 $q=1$。此后，每一部分都变成关于整数根的问题，而这些根可以从大小、整除性，或者更巧妙地从奇偶性（parity）加以排除。

解答

开首的结果

设 $\mathrm{f}(p/q)=0$，其中 p、q 为互质（coprime）整数，且 $q>0$。那么

$$0=q^{n-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p^n}{q}+a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}q+\cdots+a_1p\,q^{n-2}+a_0q^{n-1},$$

这是因为项 $a_k(p/q)^k$ 变成 $a_kp^kq^{n-1-k}$，而对每个 $k\le n-1$ 都有 $n-1-k\ge 0$。首项以外的每一项都是整数，所以

$$\frac{p^n}{q}=-\left(a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0q^{n-1}\right)$$

是整数；即 q 整除 p^n。

? **想一想** 为何 $q\mid p^n$ 会迫使 $q=1$?

若 $q>1$，则它有某个质因数 r。于是 r 整除 p^n；由于 r 是质数，它必定整除 p 本身。但这样 r 便是 p 与 q 一个大于 1 的公因数，这是不可能的。所以 q 没有任何质因数，又因

$q > 0$，得

$$q = 1.$$

因此 $\mathrm{f}(x) = 0$ 的每个有理根 p/q 都等于 p，即一个整数。（留意这里正是用上了 f 是首一（monic）多项式这一点：若首项系数为 a_n，就会剩下 $a_n p^n/q$，而我们只能推断 $q \mid a_n$。）

以下两个简单事实会有帮助。若 m 是一个整数根，则

$$m\left(m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0,$$

所以 m 整除 a_0；又因 $a_0 \neq 0$，故 $m \neq 0$。

第 (i) 部分

数 $2^{1/n}$ 是 $x^n - 2 = 0$ 的根，而这个多项式是首一的、系数为整数，且 $a_0 = -2 \neq 0$。因此若 $2^{1/n}$ 是有理数，它便会是一个满足 $m^n = 2$ 的整数 m。但

$$1^n = 1 < 2 < 4 \leq 2^n,$$

所以正实数 $2^{1/n}$ 严格地位于相邻整数 1 与 2 之间，不可能是整数。因此对每个 $n \geq 2$，$2^{1/n}$ 都是无理数。

第 (ii) 部分

这里 $n = 3$，$a_0 = 1$。任何有理根都是整除 1 的整数 m，所以 $m = \pm 1$。但

$$1^3 - 1 + 1 = 1 \neq 0, \qquad (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \neq 0.$$

所以 $x^3 - x + 1 = 0$ 没有有理根。

（另一方法：$m^3 - m = (m-1)m(m+1)$ 是一个包含两个相邻整数的乘积，所以是偶数，于是 $m^3 - m + 1$ 是奇数，永不为零。这个奇偶性的想法正是第 (iii) 部分所需要的。）

第 (iii) 部分

多项式 $x^n - 5x + 7$ 是首一的、系数为整数，常数项 $7 \neq 0$，所以任何有理根都是整数 m。我们证明 $m^n - 5m + 7$ 恒为奇数。

- 若 m 为偶数，则 m^n 与 $5m$ 都是偶数，所以 $m^n - 5m + 7$ 是偶数 − 偶数 + 奇数，即奇数。
- 若 m 为奇数，则 m^n 与 $5m$ 都是奇数，所以 $m^n - 5m$ 是偶数，而 $m^n - 5m + 7$ 是奇数。

无论哪种情况，$m^n - 5m + 7$ 都是奇数，特别地它不等于 0。因此对任何 $n \geq 2$，$x^n - 5x + 7 = 0$ 都没有整数根，从而没有有理根。

（若改为逐一检查 7 的因数，便要证明对 $m = \pm 1, \pm 7$ 及每一个 n 都有 $m^n - 5m + 7 \neq 0$；这样做也行得通，但较为繁琐；奇偶性则一次过处理所有 n。）

验算

- 试一个确实有有理根的多项式，例如 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$：根 3 与 -2 正如所料都是整数，而且都整除 $a_0 = -6$。
- 非首一的多项式可以有非整数的有理根，例如 $2x - 1$；这就是首项系数为 1 之所以重要的原因。
- 数值上，$2^{1/2} \approx 1.414$ 与 $2^{1/3} \approx 1.260$ 都位于 1 与 2 之间；而 $x^3 - x + 1$ 在 $x = \pm 1$ 时取值 1。以电脑搜索 3000 个随机的首一整系数多项式，所找到的有理根全是整数；并确认了对 $|m| \leq 200$、$2 \leq n \leq 14$，$m^n - 5m + 7$ 都是奇数。

常见错误

- 乘以 q^n 而非 q^{n-1}：你会得到 $p^n = -q(\cdots)$，这样也行得通，但之后必须说明 $q \mid p^n$；若乘以 q^{n-1}，分数 p^n/q 便令这一点一目了然。
- 断言“$q \mid p^n$，所以 $q \mid p$”而不说明原因；论证须经由 q 的一个质因数。
- 在 (iii) 中只检查了几个 n 值。论证必须同时对所有 $n \geq 2$ 成立。

STEP 之外

这是首一形式的*有理根定理*（rational root theorem）：若一个有理数是某个首一整系数多项式的根，则它是整数。用代数数论（algebraic number theory）的语言来说，整数是*整闭*（integrally closed）的，而首一整系数多项式的根称为代数整数（algebraic integers）。(iii) 中的奇偶性技巧，是将多项式模一个质数（modulo a prime）约化的最简单情况；这是证明多项式没有根或不可约（irreducible）的有力工具。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是很好的下一步读物，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）则发展了代数方面的内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。