详细解答

STEP III 2011，第 11 题

力学 • 刚体转动

> **STEP III 2011，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q11

关键思路

扭转之后，每条绳仍然由天花板上的固定点连到圆盘边缘上已转过 θ 的那一点。因此每条绳的水平部分是圆的一条弦（chord），所以几何关系要从上方俯视来看。由对称性，每条绳的情况都一样，所以铅直方向的平衡（equilibrium）决定张力（tension），而各张力的水平分量对轴的力矩（moment）之和就给出力偶（couple）。圆盘一经释放，余下的就交给能量守恒（energy conservation）。

解答

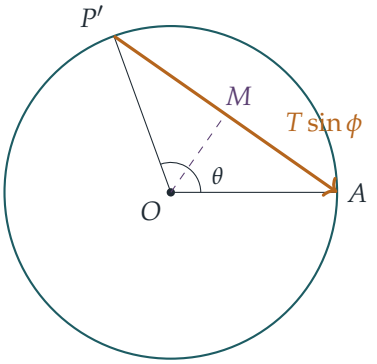
我们把圆盘模型化为刚性均匀薄片（lamina），把绳模型化为轻而不可伸长（inextensible）的绳。由对称性，所有绳都是拉紧的，张力同为 T，倾角同为 ϕ，而圆盘保持水平，圆心在 z 轴上。当圆盘转过 θ 时，它会上升至天花板下方深度 h 处。

绳的角度

经过 P 的绳系于天花板上的 $A = (a, 0, 0)$。转动后，绳的下端位于

$$P' = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ -h).$$

从上方看，A 和 P' 都在以轴为圆心、半径为 a 的圆上，两者在圆心 O 所夹的角为 θ。所以绳的水平投影（projection）是一条长度为 $2a\sin\frac{1}{2}\theta$ 的弦。



从上方俯视的图。M 是弦 $P'A$ 的中点，所以 OM 平分角 θ，与弦垂直，且长度为 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$。绳本身长 b，与铅直方向成角 ϕ，所以它的水平投影长度为 $b\sin\phi$。令两者相等，得

$$b\sin\phi = 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

此即所求。绳的铅直投影则给出圆盘的新深度：

$$h = b\cos\phi = \sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}.$$

由于 $b > 2a$，这个值是实数。由于 $0 < \theta < \pi$，我们有 $0 < \sin\frac{1}{2}\theta < 1$，所以 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$。

力偶

对圆盘作铅直方向的分解，n 个相等的张力承托着重量：

$$nT\cos\phi = mg.$$

力偶 C 作用于圆盘所在的平面内，所以对这个平衡没有影响。

每个张力都有一个铅直分量，以及一个沿弦由 P' 指向 A 的水平分量 $T\sin\phi$。铅直分量与轴平行，所以对轴没有力矩。水平分量沿弦作用，而弦与 O 的垂直距离为 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$。每条绳的水平拉力都倾向把圆盘转回 $\theta = 0$，所以 n 个力矩的转向全部相同。对轴取力矩，

$$\begin{aligned} C &= n\,T\sin\phi\cdot a\cos\tfrac{1}{2}\theta = mg\tan\phi\; a\cos\tfrac{1}{2}\theta \\ &= mg\,a\cos\tfrac{1}{2}\theta\cdot\frac{2a\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}} = \frac{mga^2\sin\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}, \end{aligned}$$

其中先用了 $nT = mg/\cos\phi$，再用 $\tan\phi = b\sin\phi/(b\cos\phi)$，最后用 $2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$。这就是所求的大小。

由静止释放

移去力偶后，圆盘会反向扭回并下降。绳是不可伸长的，且一直保持拉紧，所以不做功：每条绳的张力都与其系点相对于天花板固定点的速度垂直。重力是唯一做功的力，所以机械能守恒。

由上面的几何关系，当圆盘由绳铅直的位置转过 α 时，其深度为

$$z(\alpha) = \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} = \sqrt{b^2 - 2a^2(1 - \cos\alpha)}.$$

圆盘的动能（kinetic energy）为 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$，其中对轴的转动惯量（moment of inertia）为 $I = \frac{1}{2}ma^2$。

想一想 当绳处于铅直时，圆盘的圆心是否仍有铅直方向的速度?

没有。求导得

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}\,\dot{\alpha} = -\frac{a^2 \sin\alpha}{z}\,\dot{\alpha},$$

在 $\alpha = 0$ 时这等于零。那一刻绳是铅直的，圆盘处于最低点，所以此时全部动能都是转动动能。

圆盘由深度 $\sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$ 下降至深度 b。能量守恒给出

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}ma^2\,\omega^2 = mg\left(b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\right),$$

即

$$\frac{a^2\omega^2}{4g} = b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta},$$

此即所求。

验算

- *虚功（virtual work）*。逆着力偶把圆盘再转 $\delta\theta$，圆盘会升高 $-\delta z$，所以 $C = mg\,|\mathrm{d}z/\mathrm{d}\theta| = mg\,a^2 \sin\theta / z$。这与我们取力矩所得的力偶完全一致。
- *小扭转*。当 θ 很小时，$C \approx mga^2\theta/b$，这正是大家熟悉的双线悬挂（bifilar suspension，这里是 n 线悬挂）的回复力偶。
- *数值验证*。我们在三维空间中明确放置 n 条绳，并对随机的 a, b, θ, m, n 把各张力的力矩加起来，结果与公式吻合。我们亦取 $a = 1$、$b = 3$、$\theta = 2$、$g = 9.81$，以数值方法积分释放后的运动，得出绳变成铅直时 $a^2\omega^2/(4g) = 0.51651$，与 $3 - \sqrt{9 - 4\sin^2 1} = 0.51651$ 相符。

常见错误

- 把水平张力的力臂（lever arm）当作 a 而不是 $a\cos\frac{1}{2}\theta$。这个力沿弦作用，而不是沿切线作用。
- 忘记圆盘在扭转时会上升。这个高度变化正是最后一部分中能量的来源。
- 把平移动能 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$ 计算在内，却没有留意到它在绳铅直时等于零。

STEP 之外

这是一个运动受约束、只有一个自由度（degree of freedom）的系统。深度是扭转角的固定函数（function），所以能量只取决于 α 和 $\dot{\alpha}$。拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）把这个观察转化为运动方程。它也解释了为何力偶恰好是 $mg\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}\alpha$，这就是虚功原理。在 $\alpha = 0$ 附近线性化，便得到简谐（simple harmonic）扭转振动（torsional oscillations），而双线悬挂正是借此用来量度转动惯量。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以这个程度讲解刚体转动和能量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。