详细解答

STEP III 2011，第 10 题

力学 · 弹性绳与简谐运动

STEP III 2011，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q10

关键思路

两个质点组成的系统不受任何外来的水平力，所以它们的质心（centre of mass）以由冲量（impulse）决定的恒定速率运动。相对于质心，弦的伸长量（extension）遵从简谐运动（simple harmonic motion），而弦恰好在半个振动周期内保持拉紧。把运动拆分为“质心”加“伸长量”两部分，每个答案几乎不费功夫便会自然得出。

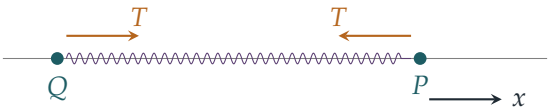
解答

模型与设置

两质点在光滑水平面上运动，因此它们所受的水平力只有轻弦的张力（tension），而这两个力大小相等、方向相反。取直线 QP 为 x 轴，方向由 Q 指向 P，并设 Q 起初位于 $x = 0$，P 起初位于 $x = a$。设 x_P 和 x_Q 为施加冲量后时间 t 时两者的位置，并设

$$e = (x_P - x_Q) - a$$

为弦的伸长量。施加冲量后一刻，$\dot{x}_P = u$，$\dot{x}_Q = 0$ 及 $e = 0$，且 $\dot{e} = u > 0$，因此弦立即变得拉紧。



弦拉紧期间，由胡克定律（Hooke's law）得张力

$$T = \frac{\lambda e}{a} = \frac{\frac{1}{2}ma\omega^2 e}{a} = \frac{1}{2}m\omega^2 e.$$

张力把 P 往回拉向 Q，并把 Q 向前拉向 P：

$$m\ddot{x}_P = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 e, \qquad m\ddot{x}_Q = +\tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

质心

把两条方程相加，得 $\ddot{x}_P + \ddot{x}_Q = 0$。因此位于 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$ 的质心 G 以恒定速度运动，该速度等于其初始值：

$$\dot{\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(u + 0) = \tfrac{1}{2}u.$$

（这其实就是动量守恒（conservation of momentum）：总动量 mu 由质量 $2m$ 共同分担。）

伸长量

把两条方程相减，

$$\ddot{e} = \ddot{x}_P - \ddot{x}_Q = -\omega^2 e.$$

这是角频率（angular frequency）为 ω 的简谐运动。由 $e(0) = 0$ 及 $\dot{e}(0) = u$，得

$$e = \frac{u}{\omega}\sin\omega t.$$

想一想 为甚么角频率是 ω，而不是 $\omega/\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}\,\omega$?

每个质点所受的力都是 $\frac{1}{2}m\omega^2 e$，但 e 的变化源于两个质点都在运动：把方程相减时，两者的加速度相加。换一个角度看，两个质量同为 m 的质点，其约化质量（reduced mass）为 $\frac{1}{2}m$，而弦的劲度（stiffness）为 $\lambda/a = \frac{1}{2}m\omega^2$，所以 $\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 / \frac{1}{2}m$。题目特意选取这个弹性模量（modulus），令结果整齐漂亮。

弦的长度下一次等于 a，是在 $e = 0$ 再次成立之时，即 $t > 0$ 时首次出现 $\sin\omega t = 0$ 之时：

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

在整段 $0 < t < \pi/\omega$ 期间都有 $e > 0$，所以弦确实一直拉紧，上述方程亦一直成立。

所走的距离

把每个位置写成质心位置加上或减去间距的一半：

$$x_P = \bar{x} + \tfrac{1}{2}(a + e), \qquad x_Q = \bar{x} - \tfrac{1}{2}(a + e).$$

在 t_1 时，$e = 0$ 再次成立，所以每个质点移动的量都与 G 完全相同，即

$$\tfrac{1}{2}u \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi u}{2\omega}.$$

为确定这个位移就是所走的距离，我们要验证两个质点都从不折返。求导得

$$\dot{x}_P = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1+\cos\omega t), \qquad \dot{x}_Q = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1-\cos\omega t),$$

而对所有 t，两者皆 ≥ 0。所以每个质点都只向前移动，各自走了距离 $\dfrac{\pi u}{2\omega}$，正如所求。

速率

在 $t_1 = \pi/\omega$ 时，$\cos\omega t_1 = -1$，所以

$$\dot{x}_P = 0, \qquad \dot{x}_Q = u.$$

因此 P 瞬间静止，而 Q 以速率 u 向 P 移动。两个质点恰好交换了速度，就如两个等质量物体发生完全弹性碰撞（perfectly elastic collision）一样。这并非巧合：动量守恒，而储存的弹性势能已全数转回动能。

到碰撞为止的时间

在 t_1 之后，Q 向 P 移动，所以间距小于 a。弦变得松弛，不施加任何力，两个质点都不受任何水平力。因此 P 保持静止，而 Q 由距离 P 为 a 之处开始，以恒定速率 u 移动。它再经过时间 a/u 便到达 P。由施加冲量到碰撞的总时间为

$$\frac{\pi}{\omega} + \frac{a}{u}.$$

验算

- 动量：在 t_1 时，总动量为 $m\cdot 0 + mu = mu$，与开始时相同。能量：两个时刻的动能都是 $\frac{1}{2}mu^2$，而两次弦都处于自然长度。
- 量纲：u/ω 是长度，a/u 是时间，理应如此。
- 我们取 $m = a = \omega = u = 1$，以数值方法逐步计算运动方程。弦在 $t = 3.14159$ 时变得松弛，此时每个质点都移动了 $1.57080 = \pi/2$；两者的速率分别为 0 和 1，而碰撞发生在 $t = 4.14159 = \pi + 1$。

常见错误

- 把 P 当作系于固定点，这会得出角频率 $\omega/\sqrt{2}$ 和错误的时间。弦的两端都在移动。
- 在 t_1 之后仍沿用简谐运动。弦一旦短于 a 便会松弛，运动变为匀速。
- 完全忘记最后一段：碰撞发生在弦回复自然长度之后再过 a/u。

STEP 之外

把二体问题（two-body problem）拆分为质心的运动和间距的运动，而后者由约化质量 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ 支配，是大学一年级力学中最有用的技巧之一。它把行星轨道、振动中的双原子分子以及碰撞的粒子都化为单体问题。在本题中，弹性弦就像一次“柔软”的碰撞，历时 π/ω，但结果与瞬间发生的弹性碰撞完全相同。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对二体约化和约化质量有细致的推导。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。