详细解答

STEP III 2011，第 1 题

纯数学 · 降阶法

> **STEP III 2011，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q1

关键思路

第 (i) 部分是一条可分离方程（separable equation），而它的出现是有原因的：把 $y = z\mathrm{e}^{-x}$ 代入 $(*)$ 后，得出的正正就是这条方程。含 z 本身的项会互相抵消，只剩下一条只涉及 z' 和 z'' 的方程，而对 $u = z'$ 来说它是一阶的。这就是*降阶法*（reduction of order）：只要知道一个解（e^{-x}），便可以求出另一个解。第 (iii) 部分则在右方不为零的情况下作同样的代换，结果变成一条线性（linear）一阶方程，可用积分因子（integrating factor）求解。

解答

全题我们都在 $x \neq -1$ 的区间上讨论，因此可以除以 $x+1$。

第 (i) 部分

由于

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1},$$

分离变量（对 $u \neq 0$）得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|u| = x + \ln|x+1| + c.$$

取指数，得 $|u| = \mathrm{e}^{c}\,|x+1|\,\mathrm{e}^{x}$。正负号与因子 e^{c} 可合并成一个任意常数，而 $u = 0$ 亦是一个解，故通解（general solution）为

$$u = C(x+1)\mathrm{e}^{x}, \qquad C \text{ 为任意常数。}$$

第 (ii) 部分

设 $y = z\mathrm{e}^{-x}$，由乘积法则（product rule）得

$$\begin{aligned} y' &= (z' - z)\mathrm{e}^{-x}, \\ y'' &= (z'' - z')\mathrm{e}^{-x} - (z' - z)\mathrm{e}^{-x} = (z'' - 2z' + z)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

代入 $(*)$，并消去非零因子 e^{-x}：

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)(z'' - 2z' + z) + x(z' - z) - z \\ &= (x+1)z'' + (-2(x+1) + x)z' + ((x+1) - x - 1)z \\ &= (x+1)z'' - (x+2)z'. \end{aligned}$$

所有 z 项都完全抵消了。记 $u = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，再除以 $x+1$，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right) u = 0,$$

这是一条关于 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的一阶方程，正如题目所要求。它恰好就是第 (i) 部分的方程。

想一想 为甚么 z 项会消失？我们能否事先预料到？

z 的系数就是代入 $z = 1$ 所得的结果，即在 $(*)$ 中检验 $y = \mathrm{e}^{-x}$。由于 $(x+1)\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$，$y = \mathrm{e}^{-x}$ 本身已经是一个解，所以常数 z 必定满足方程，因此不可能剩下单独的 z 项。这正是选用这个代换的原因。

由第 (i) 部分，$z' = C(x+1)\mathrm{e}^{x}$。用分部积分（integration by parts），

$$\int (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = (x+1)\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x} + \text{常数},$$

所以

$$z = Cx\mathrm{e}^{x} + B.$$

因此 $y = z\mathrm{e}^{-x} = Cx + B\mathrm{e}^{-x}$，把 C 改名为 A，得

$$y = Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

其中 A 和 B 为任意常数。$(*)$ 的每一个解都可以这样得到，因为任何 y 都可以写成 $z\mathrm{e}^{-x}$，其中 $z = y\mathrm{e}^{x}$；所以这就是通解，正如题目所要求。

第 (iii) 部分

同样的代换只会改变右方，右方变成 $(x+1)^2$ 除以 e^{-x}：

$$(x+1)z'' - (x+2)z' = (x+1)^2\mathrm{e}^{x}.$$

设 $u = z'$，再除以 $x+1$，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

这是线性方程。由第 (i) 部分，$(x+1)\mathrm{e}^x$ 是齐次（homogeneous）方程的解，所以它的倒数 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$ 是一个积分因子。（它在相差正负号的意义下等于 $\exp(-\int \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x)$。）两边同乘，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u\,\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad u = (x+1)\mathrm{e}^x(x+k)$$

其中 k 为常数。所以

$$z' = (x^2+x)\mathrm{e}^x + k(x+1)\mathrm{e}^x.$$

第二项积分后得 $kx\mathrm{e}^x$，与第 (ii) 部分相同。至于第一项，用两次分部积分，

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - (2x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + \text{常数} = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + \text{常数}.\end{aligned}$$

因此 $z = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + kx\mathrm{e}^x + B$，而

$$y = z\mathrm{e}^{-x} = x^2 - x + 1 + kx + B\mathrm{e}^{-x}.$$

$-x$ 可并入任意的 kx 中，所以记 $A = k-1$，通解为

$$y = x^2 + 1 + Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

其中 A 和 B 为任意常数。

另一方法：由于右方是二次式，我们可以尝试特解（particular integral）$y = px^2+qx+r$。代入得 $(x+1)2p + x(2px+q) - (px^2+qx+r) = px^2+2px+2p-r$，与 x^2+2x+1 比较系数，得 $p=1$、$r=1$，而 q 可任意取值（因为 x 是一个余函数（complementary function））。再加上第 (ii) 部分的余函数，便得出相同的答案。

验算

直接代入 $y = x^2+1$：$y' = 2x$，$y'' = 2$，所以左方为 $2(x+1) + 2x^2 - x^2 - 1 = x^2+2x+1 = (x+1)^2$，符合要求。数值上，随机选取 A、B 及 $x \in (-0.9, 3)$，以有限差分（finite difference）计算 $y = x^2+1+Ax+B\mathrm{e}^{-x}$ 的导数，结果满足方程的误差约在 3×10^{-6} 以内；同样的测试亦验证了第 (i) 和第 (ii) 部分。

常见错误

- 把 y'' 算错：它是 $(z''-2z'+z)\mathrm{e}^{-x}$，$z$ 前面是加号；这里若出现正负号错误，便会留下一个多余的 z 项。

- 在第 (iii) 部分消去因子 e^{-x} 时，忘记把右方乘以 e^{x}。
- 漏掉常数：最终答案需要两个任意常数，每次积分各产生一个。

STEP 之外

降阶法是一种通用技巧：若 y_1 是某条线性二阶方程的解，代入 $y = y_1 v$ 必定会消去 v 项，剩下一条关于 v' 的一阶方程。这亦是*参数变易法*（variation of parameters）背后的思路，该方法对任何右方都能求出特解。两者在 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）中都有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。