详细解答

STEP II 2011，第 9 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP II 2011，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

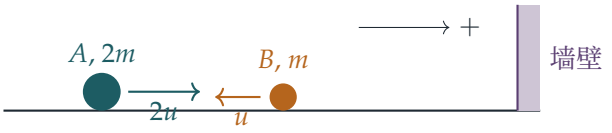
step.maths.org/questions/11-s2-q9

关键思路

这里每一次碰撞都是正碰（direct collision），所以每次都用同样两条方程解决：动量守恒（conservation of momentum）和牛顿（Newton）恢复定律（law of restitution）。真正的危险只在于正负号。一开始就固定一个正方向（向着墙壁），把每个速度都写成该方向上带正负号的数，代数运算便会自然理顺。最后的论断归结为证明某个表达式恒为正；由于它是 f 的线性（linear）函数，我们只需考察 f 取值范围的两个端点。

解答

模型。 我们把 A 和 B 视为光滑（smooth）平面上的质点（particle），所以除碰撞时刻外没有水平力作用；墙壁亦是光滑的，因此它只会令 B 的速度反向（并按 f 缩放）。第一次碰撞后 B 继续前进并撞向墙壁，所以墙壁位于 B 那一侧，即沿 A 原本运动方向、在 B 之外。我们取该方向为正方向。于是沿直线的次序始终是 A、B、墙壁。



第一次碰撞

碰撞前 A 的速度为 $2u$，B 的速度为 $-u$。设碰撞后两者的速度分别为 v_A 和 v_B。由动量守恒：

$$2m(2u) + m(-u) = 2m\,v_A + m\,v_B \quad \Longrightarrow \quad 2v_A + v_B = 3u.$$

接近速率为 $2u-(-u)=3u$。由于 B 在 A 的前方，分离速率为 v_B-v_A，牛顿恢复定律给出

$$v_B-v_A=3eu.$$

第一条方程减去第二条方程，得 $3v_A=3u-3eu$，所以

$$v_A=(1-e)u,\qquad v_B=(1+2e)u.$$

两者皆 ≥ 0，所以碰撞后 A 以速率 $(1-e)u$ 向墙壁移动（若 $e=1$ 则静止），而 B 以速率 $(1+2e)u$ 向墙壁移动。这与 B 随后撞到墙壁相符。

墙壁

墙壁光滑而碰撞为正碰，所以 B 沿直线以速率 $f(1+2e)u$ 反弹，其速度变为 $-f(1+2e)u$。与此同时，A 仍以速度 $(1-e)u\geq 0$ 运动，因为没有任何力作用于它。B 现正向 A 移动，所以两者必定再次相遇。

第二次碰撞

第二次碰撞前一刻，速度为

$$A:\ (1-e)u,\qquad B:\ -f(1+2e)u.$$

设碰撞后的速度为 w_A 和 w_B。由动量守恒得

$$2w_A+w_B=2(1-e)u-f(1+2e)u.$$

想一想 这一次恢复方程应该怎样写，哪个减哪个？

B 仍然是较接近墙壁的质点，所以分离速度仍是 w_B-w_A。接近速率是 A 的速度减去 B 的速度，即 $(1-e)u+f(1+2e)u$。因此

$$w_B-w_A=e[(1-e)u+f(1+2e)u].$$

为求出 w_B，把这条方程的两倍加到动量方程上：

$$\begin{aligned}3w_B&=2(1-e)u-f(1+2e)u+2e(1-e)u+2ef(1+2e)u\\&=2(1-e)(1+e)u+f(1+2e)(2e-1)u\\&=2(1-e^2)u-(1-4e^2)fu.\end{aligned}$$

所以

$$w_B=\tfrac{2}{3}(1-e^2)u-\tfrac{1}{3}(1-4e^2)fu,$$

此速度以正方向（即向着墙壁）量度。这就是所求的结果。

B 总是向墙壁移动

我们须证明对所有 $0 < e \le 1$ 及 $0 < f \le 1$，都有 $w_B > 0$。由于 $u > 0$，这等同于证明

$$g(f) = 2(1-e^2) + (4e^2-1)f > 0.$$

$1-4e^2$ 一项可正可负，所以不能直接把它略去。改为固定 e，注意 g 是 f 的线性函数，而且

$$g(0) = 2(1-e^2) \ge 0, \qquad g(1) = 2-2e^2+4e^2-1 = 1+2e^2 > 0.$$

$[0,1]$ 上的线性函数是其两端值的加权平均：$g(f) = (1-f)\,g(0) + f\,g(1)$。当 $0 < f \le 1$ 时，第一项 ≥ 0，而第二项严格为正（因为 $f > 0$ 且 $g(1) > 0$），所以 $g(f) > 0$。因此 $w_B > 0$，无论 e 和 f 取何值，B 在第二次碰撞后都向墙壁移动。

验算

- 取 $e = f = 1$（全程完全弹性），A 在第一次碰撞时完全停下，B 以 $3u$ 离开，再以 $3u$ 返回，撞向一个质量为它两倍的静止质点。公式给出 $w_B = 0 + u = u$，与弹性碰撞的结果 $\frac{m-2m}{3m}(-3u) = u$ 吻合。
- 取 $e = f = \frac{1}{2}$，公式给出 $w_B = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}u = \frac{1}{2}u$。逐步模拟位置和碰撞，亦得到相同的值 $0.5u$。
- 对正负号而言，最坏情况是 $e = 1$ 而 f 很小。此时 $w_B = fu$，虽然很小，但仍然为正。

常见错误

- 在第二次碰撞中用速率代替带正负号的速度，因而把 B 的反弹速度符号弄错。
- 因为 B“从墙壁那边过来”而把恢复方程写成 $w_A - w_B$。质点沿直线的次序并没有改变，所以分离速度仍是 $w_B - w_A$。
- 假设 $1-4e^2 > 0$ 来断言 $w_B > 0$。当 $e > \frac{1}{2}$ 时此假设不成立，这正是论证必须用到 $f \le 1$ 的原因。

STEP 之外

恢复定律是一个经验模型（empirical model）。在大学一年级的课程中，你会同时接触一个更简洁的概念——质心参考系（centre-of-mass frame）：在该参考系中总动量为零，而恢复系数为 e 的碰撞只是把两个速度都乘以 $-e$。这令第一次碰撞之类的结果几乎一目了然。与墙壁的反复碰撞亦会在撞球问题（billiard problems）和计数论证中再次出现，例如

那个著名的问题：两个木块与一面墙之间的碰撞次数，竟然给出 π 的各位数字。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）正是以这种精神讲解动量与碰撞。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。