详细解答

STEP II 2011，第 8 题

纯数学 · 圆的渐伸线

> **STEP II 2011，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q8

关键思路

在任何时刻，绳子都由两段组成：一段是圆上的弧，其长度可以由角度直接读出；另一段是沿切线（tangent）离开圆的直线段。由于总长度固定，直线段的长度就是剩下的部分；而切线与半径垂直，所以用向量（vector）就能轻易定出 B 的位置。至于最后的面积，留意整个被扫过的区域就是“外支下方的面积，减去内支下方的面积，再减去半圆”。

解答

参数方程

设 $P = (\cos t, \sin t)$ 为绳子离开圆的点，因此 t 是由正 x 轴到 OP 的角度。开始时 $P = A = (-1, 0)$，所以 $t = \pi$；当绳子从圆的顶部绕过去时，P 沿顺时针方向移动，t 递减至 0。

与圆接触的那段绳子是由角度 π 到角度 t 的弧。半径为 1，所以这段弧长为 $\pi - t$。绳子长度为 π，所以直线段 PB 的长度为

$$\pi - (\pi - t) = t.$$

由于绳子拉紧，PB 是圆在 P 点的切线，因此它垂直于 $OP = (\cos t, \sin t)$。与 OP 垂直的两个单位向量是 $\pm(\sin t, -\cos t)$。开始时（$t = \pi$）绳子由 A 垂直向上，方向为 $(0, 1) = (\sin \pi, -\cos \pi)$，而根据连续性（continuity），符号在整个过程中保持不变。因此

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + t\,(\sin t, -\cos t),$$

即

$$x = \cos t + t \sin t, \qquad y = \sin t - t \cos t,$$

正如所求。（验算：$t=\pi$ 给出 $(-1,\pi)$，即 B 的起始位置；$t=0$ 给出 $(1,0)$，即 B 碰到圆的位置。）

x 的最大值

求导后，$\pm\sin t$ 与 $\pm\cos t$ 各项互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t.$$

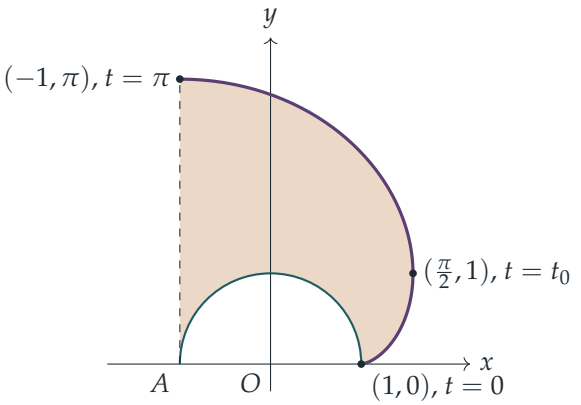
当 $0<t<\pi$ 时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t\cos t$ 在 $t<\frac{\pi}{2}$ 时为正，在 $t>\frac{\pi}{2}$ 时为负。所以当 t 取遍 $[0,\pi]$ 时，x 先递增后递减，最大值出现在

$$t_0=\frac{\pi}{2},\qquad \text{此时}(x,y)=\left(\frac{\pi}{2},1\right).$$

草图

有两个事实有帮助。第一，当 $0<t\le\pi$ 时 $y>0$：若 $t\le\frac{\pi}{2}$，则由于 $\tan t>t$，$y=\cos t(\tan t-t)>0$（当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时直接有 $y=1$）；若 $t>\frac{\pi}{2}$，则 $\cos t<0$，所以 y 的两项都非负，且 $\sin t-t\cos t>0$。第二，$x^2+y^2=1+t^2$，所以 B 永远在圆外，而且离圆的距离随 t 增大。此外 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t\sin t\ge 0$，所以 y 随 t 稳定递增。

因此曲线由 $(1,0)$ 出发（该处 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan t=0$，所以它水平地离开 x 轴），上升至最右点 $(\frac{\pi}{2},1)$，该处切线垂直，然后扫过圆的顶部回到 $(-1,\pi)$，该处再次水平。这条曲线是圆的渐伸线（involute）。



阴影区域介乎曲线、绳子的初始位置（虚线）与半圆之间，就是绳子扫过的面积。

$\pi \geq t \geq t_0$ 部分的面积

在曲线的这一部分，x 由 $\frac{\pi}{2}$（在 $t=\frac{\pi}{2}$）递减至 -1（在 $t=\pi$），且 $y>0$。所以这段弧与 x 轴之间的面积为

$$\int_{-1}^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{\pi/2} y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} (t^2\cos^2 t - t\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t,$$

其中我们对调了上下限以吸收负号。我们需要两个积分，都是先用倍角公式（double-angle formula），再用分部积分（integration by parts）。写 $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$ 及 $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$。用分部积分，

$$\int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{2}t\cos 2t + \tfrac{1}{4}\sin 2t,$$
$$\int t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t - \int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t + \tfrac{1}{2}t\cos 2t - \tfrac{1}{4}\sin 2t.$$

在 $t=\pi$ 时，$\sin 2t=0$，$\cos 2t=1$；在 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin 2t=0$，$\cos 2t=-1$。因此

$$\int_{\pi/2}^{\pi} t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \tfrac{1}{2}\Big(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{3\pi}{8},$$
$$\int_{\pi/2}^{\pi} t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{3}t^3\Big]_{\pi/2}^{\pi} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7\pi^3}{48} + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{7\pi^3}{48}+\frac{3\pi}{8}.$$

所以所求面积为

$$\frac{7\pi^3}{48}+\frac{3\pi}{8}-\Big(-\frac{3\pi}{8}\Big) = \frac{7\pi^3}{48}+\frac{3\pi}{4}.$$

绳子扫过的面积

想一想 $t \geq t_0$ 那段弧下方的区域比扫过的区域多。必须除去甚么?

刚求得的面积，是外弧（$t_0 \leq t \leq \pi$）与 x 轴之间、$-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 范围内的全部区域。扫过的区域等于这个面积减去位于其下方的两块：上半圆（semicircle），面积为 $\frac{\pi}{2}$；以及内弧（$0 \leq t \leq t_0$）与 x 轴之间、$1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 范围内的狭长小块。内弧位于圆外（因为当 $t>0$ 时 $x^2+y^2 = 1+t^2 > 1$），并位于外弧下方，所以这两块互不重叠，相减是合理的。

在内弧上 x 随 t 递增，所以狭长小块的面积为

$$\int_0^{\pi/2} y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (t\sin t\cos t - t^2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

使用同样的原函数（antiderivative），现在以 $t=0$ 为下限（该处 $\sin 2t=0$，$\cos 2t=1$），

$$\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$
$$\int_0^{\pi/2} t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{24} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8},$$

所以狭长小块的面积为 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}$（约 0.14，又小又正，令人放心）。因此绳子扫过的面积为

$$\left(\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi^3}{48} = \frac{\pi^3}{6}.$$

验算

- 最后的答案有更简洁的求法。当 t 减少 δt 时，绳子的直线段（长度为 t）绕着一个基本上固定的点转过角度 δt，扫出面积约为 $\frac{1}{2}t^2\,\delta t$ 的细小扇形（sector）。把这些加起来得 $\int_0^\pi \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6}$，结果一致。
- 数值上：用辛普森法则（Simpson's rule）求外弧下方的面积得 6.87794，与 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}$ 吻合；对阴影区域的边界使用鞋带公式（shoelace formula）得 5.16771 $\approx \frac{\pi^3}{6}$。

常见错误

- 以为直线段的长度是 $\pi - t$（那是弧长），或者在两个切线方向中选错了一个；检查 $t = \pi$ 的情况可以同时发现这两种错误。
- 把积分上下限保留为 t_0 到 π，却没有留意 x 沿该段弧递减，结果得出负的“面积”。
- 忘记内弧下方的小区域，结果得出扫过面积为 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}$。

STEP 之外

绳子从一条曲线上解开时，其末端描出的曲线称为渐伸线，而绳子所解开的那条曲线则称为它的渐屈线（evolute）：渐伸线在 B 点的曲率中心（centre of curvature）正是绳子离开圆的点 P。大多数齿轮的齿形都采用圆的渐伸线，因为两个这样的齿互相滚动时，速度比保持不变。“验算”一节中的“细小扇形”论证，其实就是极坐标面积公式（polar-area formula）$\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 的化身。想进一步了解曲率及这类曲线，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）；至于背后严谨的微积分，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。