详细解答

STEP II 2011，第 7 题

纯数学 · 数列与级数

STEP II 2011，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s2-q7

关键思路

切勿逐项处理这两个数列（sequence）：把每个和拆成 λ 的幂之和与 μ 的幂之和，再分别套用几何级数（geometric series）公式。这两个数满足 $\lambda+\mu=2$ 及 $\lambda\mu=-1$，所以它们是 $x^2=2x+1$ 的根。单凭这条二次方程（quadratic equation），所有棘手的分母都会化简掉。另一个工具是平方：b_k^2 和 a_k^2 都会化成 a_{2k} 加一个常数。

解答

首先列出一些全程都会用到的事实：

$$\lambda-1=\sqrt{2}, \qquad \mu-1=-\sqrt{2}, \qquad \lambda\mu=1-2=-1, \qquad \lambda-\mu=2\sqrt{2}.$$

此外 $a_0=2$ 及 $b_0=0$。

第 (i) 部分

由于 $\lambda\neq 1$ 且 $\mu\neq 1$，我们可以对每个和套用几何级数公式：

$$\sum_{r=0}^{n}\lambda^r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}, \qquad \sum_{r=0}^{n}\mu^r=\frac{\mu^{n+1}-1}{\mu-1}=-\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}.$$

把第一个和减去第二个和，

$$\sum_{r=0}^{n}b_r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{a_{n+1}-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1},$$

正是所求。若改为把两个和相加，两个 -1 便互相抵消：

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} a_r = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b_{n+1}.}$$

（快速检验：当 $n=0$ 时，这式表示 $a_0 = b_1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2$，是正确的。）

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分，内层的和是 $b_{m+1}/\sqrt{2}$。因此

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{2n} b_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{2n+1} b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=0}^{2n+1} b_s,$$

最后一步成立，是因为 $b_0 = 0$。现在以 $2n+1$ 代替 n 应用第 (i) 部分，得

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2} + \frac{a_{2n+2}}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1. \qquad (*)$$

? **想一想** 怎样把 a_{2n+2} 与 b_{n+1}^2 联系起来?

我们取平方，并利用 $\lambda\mu = -1$ 处理交叉项：

$$b_{n+1}^2 = \lambda^{2n+2} + \mu^{2n+2} - 2(\lambda\mu)^{n+1} = a_{2n+2} - 2(-1)^{n+1}, \qquad a_{n+1}^2 = a_{2n+2} + 2(-1)^{n+1}.$$

若 n 是奇数，则 $n+1$ 是偶数，所以 $b_{n+1}^2 = a_{2n+2} - 2$。于是 $(*)$ 等于 $\frac{1}{2}(a_{2n+2}-2) = \frac{1}{2}b_{n+1}^2$，正是所求。

若 n 是偶数，则 $(-1)^{n+1} = -1$，所以这时等于 $a_{2n+2} - 2$ 的是 a_{n+1}^2。因此

$$\boxed{n \text{ 为偶数}: \quad \sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2}$$

或等价地写成 $\frac{1}{2}b_{n+1}^2 - 2$。

第 (iii) 部分

由第 (i) 部分，再用第 (ii) 部分的平方恒等式，

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \tfrac{1}{2}b_{n+1}^2 = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}.$$

对于第二个和，我们同样把它拆成两个几何级数，这次公比分别是 λ^2 和 μ^2：

$$\sum_{r=0}^{n} \lambda^{2r+1} = \lambda\,\frac{\lambda^{2n+2}-1}{\lambda^2-1}.$$

想一想 $\lambda^2 - 1$ 可以化简吗?

可以。由于 $\lambda^2 = 2\lambda + 1$，得 $\lambda^2 - 1 = 2\lambda$，于是因子 λ 被约去，和为 $\frac{1}{2}(\lambda^{2n+2} - 1)$。由于 μ 满足同一条二次方程，$\mu^2 - 1 = 2\mu$，而 μ 的和为 $\frac{1}{2}(\mu^{2n+2} - 1)$（注意 $\mu^2 \neq 1$，所以公式适用）。两者相加，

$$\sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_{2n+2} - 2\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1.$$

因此

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 - \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}\right) - \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1\right) = 1 + (-1)^n.$$

若 n 是偶数，此式等于 2，正是所求。若 n 是奇数，此式等于 0，所以

$$\boxed{n \text{ 为奇数}: \quad \left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1}.}$$

验算

各 a_n 都是整数，并满足 $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$：$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \ldots$。在第 (ii) 部分取 $n = 3$，部分和 $2, 4, 10, 24, 58, 140, 338$ 加起来是 576。由于 $b_4 = 24\sqrt{2}$，得 $\frac{1}{2}b_4^2 = 576$，两者吻合。在第 (iii) 部分取 $n = 2$：$(2 + 2 + 6)^2 - (2 + 14 + 82) = 100 - 98 = 2$。取 $n = 1$：$(2 + 2)^2 - (2 + 14) = 0$。我们用电脑验证了全部三个部分，包括奇偶两种情况 (parity)，直至 n 等于 24 的每一个值。

常见错误

- 忘记 $\mu - 1 = -\sqrt{2}$ 是负数，以致在第 (i) 部分把 a 和 b 的角色对调。
- 写成 $(\lambda\mu)^{n+1} = 1$ 而不是 $(-1)^{n+1}$；这个正负号正是要按奇偶分情况的关键所在。
- 在第 (ii) 部分移动 b_{m+1} 之和的下标时，没有留意到正是 $b_0 = 0$ 才容许和由 0 开始。

STEP 之外

两个数列都满足线性递推关系 (linear recurrence) $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$，其特征方程 (characteristic equation) 为 $x^2 = 2x + 1$。所以 λ 和 μ 是它的根，而 a_n 和 b_n 是特解。由于 $\lambda^n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$，恒等式 $\lambda^n\mu^n = (-1)^n$ 便化为 $a_n^2 - b_n^2 = 4(-1)^n$，这是环 (ring) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

中的一条佩尔型方程（Pell-type equation）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）阐述了这类单位（units）与 $\sqrt{2}$ 的连分数（continued fractions）之间如何互相配合。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。