详细解答

STEP II 2011，第 6 题

纯数学 · 分部积分法

> **STEP II 2011，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q6

关键思路

被积函数（integrand）$[f'(x)]^2[f(x)]^n$ 只差一个 f' 的因子，就会变成一眼便能积出来的形式，因为 $f'(x)[f(x)]^n$ 正是 $[f(x)]^{n+1}/(n+1)$ 的导数（derivative）。所以我们用分部积分（integration by parts），把这一部分拆出来。剩下的积分含有 f''，而条件 $f''=kff'$ 又把它变回同样容易处理的形式 $f'f^m$。至于各个应用，关键就在于选取 f 和 n，使所给的被积函数等于 $[f']^2f^n$，再求出 k。

解答

一般结果

以 f 代表 $f(x)$，其余类推。用分部积分，取 $u=f'$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'f^n$，于是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f''$ 及 $v=\dfrac{f^{n+1}}{n+1}$（这没有问题，因为 $n\geq 1$ 表示 $n+1\neq 0$）：

$$\begin{aligned} I=\int f'\cdot f'f^n\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int f''f^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{k}{n+1}\int f'f^{n+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{利用}f''=kff' \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{kf^{n+3}}{(n+1)(n+3)}+C. \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{I=\frac{f'(x)\,[f(x)]^{n+1}}{n+1}-\frac{k\,[f(x)]^{n+3}}{(n+1)(n+3)}+C}$$

这正是题目要求的、以 $f(x)$、$f'(x)$、k 和 n 表示的式子。

第 (i) 部分

对于 $f(x)=\tan x$，我们有 $f'(x)=\sec^2 x$ 及

$$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\tan x=2\tan x\sec^2 x=2f(x)f'(x),$$

所以条件成立，且 $k=2$。代入公式得

$$\int \sec^4 x\tan^n x\,\mathrm{d}x=\frac{\sec^2 x\tan^{n+1}x}{n+1}-\frac{2\tan^{n+3}x}{(n+1)(n+3)}+C. \tag{1}$$

验证。直接计算：利用 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ 及代换（substitution）$t=\tan x,\mathrm{d}t=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$：

$$\int \sec^4 x\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int(1+t^2)t^n\,\mathrm{d}t=\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{t^{n+3}}{n+3}+C.$$

用 $\sec^2 x=1+t^2$ 改写 (1) 的右方，得

$$\frac{(1+t^2)t^{n+1}}{n+1}-\frac{2t^{n+3}}{(n+1)(n+3)}=\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{(n+3)-2}{(n+1)(n+3)}t^{n+3}=\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{t^{n+3}}{n+3},$$

答案相同。所以对 $f=\tan$ 而言，结果得到验证。

所求积分。由于

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}=\tan^4 x\sec^4 x=[f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

这是 (1) 中 $n=4$ 的情况。利用刚才得到的化简形式，

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^7 x}{7}+C.$$

第 (ii) 部分

? **想一想** 应该取哪一个 f？那个 $\sec^2 x$ 又从何而来？

括号 $(\sec x+\tan x)$ 显然是 f 的候选，所以试取 $f(x)=\sec x+\tan x$。它的导数是

$$f'(x)=\sec x\tan x+\sec^2 x=\sec x(\tan x+\sec x)=\sec x\,f(x).$$

这就是关键事实：对 f 求导，只不过是把它乘以 $\sec x$。因此

$$\begin{aligned}f''(x)&=\sec x\tan x\,f(x)+\sec x\,f'(x)=\sec x\tan x\,f+\sec^2 x\,f\\&=\sec x\,f\,(\tan x+\sec x)=\sec x\,f^2,\end{aligned}$$

又因为 $f\,f'=f\cdot\sec x\,f=\sec x\,f^2$ 亦成立，所以 $f''=ff'$，即 $k=1$。

此外 $[f'(x)]^2 = \sec^2 x\,[f(x)]^2$，所以

$$\sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6 = \sec^2 x\, f^2 \cdot f^4 = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

这是一般结果中 $n = 4$、$k = 1$ 的情况：

$$\begin{aligned}\int \sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^5}{5} - \frac{f^7}{35} + C = \frac{\sec x\, f^6}{5} - \frac{f^7}{35} + C \\ &= \frac{f^6}{35}(7\sec x - (\sec x + \tan x)) + C \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^6\,(6\sec x - \tan x)}{35} + C.\end{aligned}$$

验算

- 对 (i) 的答案求导：$\sec^2 x\tan^4 x + \sec^2 x\tan^6 x = \sec^2 x\tan^4 x(1 + \tan^2 x) = \tan^4 x\sec^4 x$。
- 以数值计算，辛普森法则 (Simpson's rule) 给出 $\int_{-0.7}^{1.1} \sin^4 x/\cos^8 x\,\mathrm{d}x \approx 22.12954$，与 $\left[\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x\right]_{-0.7}^{1.1}$ 吻合；而 $\int_{-1}^{0.9} \sec^2 x(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x \approx 133.68566$，与 (ii) 的答案吻合。
- 对于 $f = \tan$ 及 1 至 6 的每一个 n，一般公式都与数值积分（quadrature）的结果一致。

常见错误

- 在分部积分中选取 $u = f^n$：这样会产生 $f^{n-1}[f']^3$，情况只会更糟。应把一个 f' 与 f^n 配成一对，使它能恰好积出来。
- 对 $\tan x$ 取 $k = 1$：其实 $f'' = 2\sec^2 x\tan x$，所以 $k = 2$。
- 在 (ii) 中，忘记 $\sec^2 x$ 必须以 $[f']^2/f^2$ 的形式吸收进去，这正是指数由 6 降至 $n = 4$ 的原因。

STEP 之外

条件 $f'' = kff'$ 本身就是一条微分方程(differential equation)：积分一次得 $f' = \frac{1}{2}kf^2 + c$，这是一条一阶可分离变量方程（separable equation），其解包括 tan（$k = 2$，$c = 1$）及 $\sec x + \tan x (k = 1, c = \frac{1}{2})$。认识到某个被积函数之所以容易处理，是因为该函数满足某条常微分方程 (ODE)，这个主题在大学一年级有关特殊函数 (special functions) 和递推公式 (reduction formulae) 的课程中会反复出现。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential*

Equations（《初等微分方程》）讲解了像这样的可分离方程和自治方程（autonomous equations）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。