详细解答

STEP II 2011，第 5 题

纯数学 · 向量与反射

STEP II 2011，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s2-q5

关键思路

要把一点关于一条经过原点的直线作反射（reflection），可把它的位置向量（position vector）分解为沿该直线的部分和与该直线垂直的部分：反射保留前者，并把后者反向。$\mathbf{b}$ 沿 $\mathbf{a}$ 方向的分量（component）就是我们熟悉的投影（projection）$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$，其余的都只是点积（dot product）的运算整理。至于共线（collinear）问题，记住：一点位于直线 AB 上，当且仅当它的位置向量可写成 $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$，其中 $s+t=1$。

解答

整个解答中，$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均非零且互不平行，因为 O、A、B 不共线。特别地，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\neq 0$ 且 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\neq 0$，所以可以除以它们。记 $\theta=\angle AOB$。

反射点 C

设 P 为从 B 到直线 OA 的垂足（foot of the perpendicular）。它的位置向量是某个倍数 $k\mathbf{a}$，而 $\mathbf{b}-k\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 垂直：

$$(\mathbf{b}-k\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

关于直线 OA 的反射保持 P 不动，并把 B 映到另一侧的点 C，使 P 为 BC 的中点。所以 $\mathbf{c}=2\overrightarrow{OP}-\mathbf{b}$，即

$$\mathbf{c}=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}-\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}-\mathbf{b},\qquad \lambda=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}},$$

即为所求。

反射点 D

以直线 OB 代替 OA，同样的论证给出

$$\mathbf{d} = \frac{2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\,\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

而 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 2\right)\mathbf{b} - (\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1\right)\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}.\end{aligned}$$

这就是 $\mathbf{d} = \mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$，其中

$$\mu = \frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1 = \frac{4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})} - 1 = 4\cos^2\theta - 1,$$

最后一步用了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$。下面需要用到的正是 $4\cos^2\theta - 1$ 这个形式。

A、B、D 共线

点 D 位于直线 AB 上，当且仅当对某个纯量（scalar）t 有 $\mathbf{d} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$。另一方面，我们亦有 $\mathbf{d} = -\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$。

> ? **想一想** 为甚么可以比较 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的系数（coefficient）？

因为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互不平行。若 $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = s'\mathbf{a} + t'\mathbf{b}$，则 $(s - s')\mathbf{a} = (t' - t)\mathbf{b}$；除非两个括号都等于零，否则这会使 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行。这正是用到 O、A、B 不共线的地方。

所以 $-\lambda = 1 - t$ 且 $\mu = t$。消去 t，可知 A、B、D 共线当且仅当

$$\mu = \lambda + 1.$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ 的情况

此时共线条件给出 $\mu = \frac{1}{2}$，所以 $4\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}$，即 $\cos^2\theta = \frac{3}{8}$。由于 $\lambda < 0$，我们有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$，所以 $\cos\theta < 0$，故

$$\cos\angle AOB = -\sqrt{\tfrac{3}{8}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

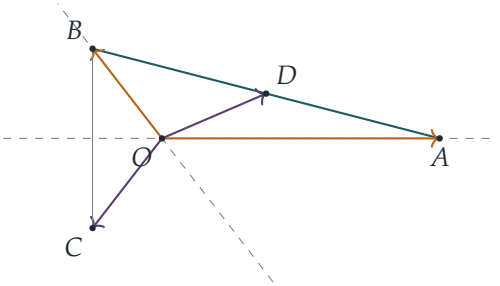
于是

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

所以 D **是** AB **的中点**。关于图形的形状，我们还可以说得更多。由 $\lambda = \dfrac{2|\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{a}|} = -\frac{1}{2}$，

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = -4\cos\theta = \sqrt{6},$$

所以 $OA = \sqrt{6}\,OB$，而角 AOB 是钝角（obtuse angle）（约 127.8°）。此外，反射保持与 O 的距离不变，所以 $OD = OC = OB$：AB 的中点到 O 的距离恰好与 B 相同。



验算

- 先关于 OA、再关于 OB 反射两次，等同于绕 O 旋转（rotation）2θ。所以 D 应是 B 旋转 2θ 后的位置，且 $\cos\angle BOD = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$。在最后的情况中，这等于 $2\cdot\frac{3}{8} - 1 = -\frac{1}{4}$。直接计算，$\mathbf{b}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)|\mathbf{b}|^2 = -\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2$，其中用了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{4}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$，结果吻合。
- 若 $\theta = 90°$，则 $\lambda = 0$，C 是 $-\mathbf{b}$，而 D 亦是 $-\mathbf{b}$。公式给出 $\mu = 4\cdot 0 - 1 = -1$，与预期相符。
- 数值上，取 $\mathbf{a} = (\sqrt{6}, 0)$ 及 $\mathbf{b} = (-0.6124,\ 0.7906)$，反射两次得 $\mathbf{d} = (0.9186,\ 0.3953)$，这正是 AB 的中点，而且 $|\mathbf{d}| = 1 = |\mathbf{b}|$。

常见错误

- 把反射写成 $\mathbf{b} - 2\times$（投影）。这其实是关于与 OA 垂直的直线作反射。可用 $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ 来测试：它应保持不动。
- 取 $\cos\theta = +\sqrt{6}/4$。λ 的正负决定了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的正负。
- 比较系数时没有说明 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 线性无关（linearly independent）。

STEP 之外

映射 $\mathbf{x} \mapsto \frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a} - \mathbf{x}$ 是一个线性映射（linear map），它的矩阵是大学一年级课程中行列式（determinant）为 -1 的正交矩阵（orthogonal matrix）的标准例子。两次反射的复合是一个旋转，旋转角为两面镜子之间夹角的两倍。这是研究等距变换（isometry）以及由反射生成的群（group）——例如正多边形的对称群——的起点。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）对投影和反射矩阵有很好的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。