详细解答

STEP II 2011，第 4 题

纯数学 · 三角方程

> **STEP II 2011，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q4

关键思路

把 $\cos\theta$ 写成某个相关角的正弦（或余弦），这样“$\cos\theta = \sin 4\theta$”就变成两个余弦相等的方程，可以精确求解。将 $\sin 4\theta$ 展开成 $\sin\theta$ 的幂，会得到一个三次方程（cubic），其根正是这些角的正弦值，像 $\sin 18^\circ$ 这样的根式（surd）就是这样出现的。第 (ii) 部分是一个关于 $\sin^2 x$ 的二次方程（quadratic）；而第 (iii) 部分只要找到一个正弦平方等于 $\frac{1}{4}$ 的角，就会发现它其实是乔装了的第 (ii) 部分。

解答

第 (i) 部分

为了把同类的东西放在一起比较，写 $\sin 4\theta = \cos(90^\circ - 4\theta)$。两个角的余弦相等，当且仅当它们在相差 360° 的倍数之下相等或互为相反数，因此

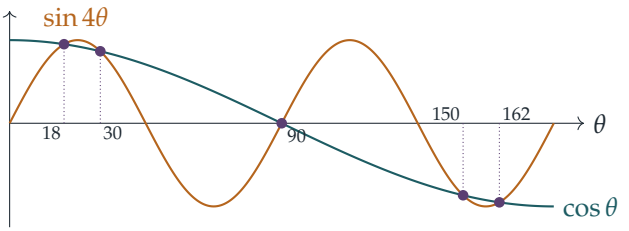
$$\cos\theta = \cos(90^\circ - 4\theta) \iff \theta = \pm(90^\circ - 4\theta) + 360^\circ k \quad \text{对某整数} k.$$

- 取 $+$ 号：$5\theta = 90^\circ + 360^\circ k$，所以 $\theta = 18^\circ + 72^\circ k$。在 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 内得 $\theta = 18^\circ, 90^\circ, 162^\circ$。
- 取 $-$ 号：$3\theta = 90^\circ - 360^\circ k$，所以 $\theta = 30^\circ - 120^\circ k$，得 $\theta = 30^\circ, 150^\circ$。

因此解为

$$\theta = 18^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 162^\circ.$$

下图证实两条曲线恰好相交五次。



接下来处理“由此”的部分。设 $s = \sin\theta$。两次运用倍角公式（double-angle formulae），

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta),$$

于是方程 $\cos\theta = \sin 4\theta$ 变成

$$\cos\theta\big(1 - 4s(1 - 2s^2)\big) = 0.$$

想一想 为甚么可以约去 $\cos\theta$?

在五个解之中，只有 $\theta = 90°$ 使 $\cos\theta = 0$。其余四个解 $18°, 30°, 150°, 162°$ 都有 $\cos\theta \neq 0$，所以对它们可以除以 $\cos\theta$，得

$$8s^3 - 4s + 1 = 0.$$

我们知道 $s = \sin 30° = \frac{1}{2}$ 是其中一个根，因式分解（factorising）得

$$8s^3 - 4s + 1 = (2s - 1)(4s^2 + 2s - 1).$$

$\sin 18°$ 是这个三次方程的根，而由于正弦在 $[0°, 90°]$ 上递增，$0 < \sin 18° < \sin 30° = \frac{1}{2}$。所以 $\sin 18° \neq \frac{1}{2}$，它必定是 $4s^2 + 2s - 1 = 0$ 的根，而这个方程的根为

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

只有取 $+$ 号的根是正数，所以

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}\big(\sqrt{5} - 1\big),$$

得证。

第 (ii) 部分

设 $s = \sin x$。由于 $\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x = 4s^2(1 - s^2)$，方程只取决于 s：

$$4s^2 + 1 = 16s^2(1 - s^2) \iff 16s^4 - 12s^2 + 1 = 0.$$

这是关于 s^2 的二次方程：

$$s^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

要开平方根，留意

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

s^2 的两个值都介乎 0 与 1 之间，所以四个平方根每一个都确实是 $\sin x$ 可取的值；又因为以上每一步都可逆，它们都满足原方程。可能的值为

$$\sin x = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}.$$

由第 (i) 部分，$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \sin 18^\circ$；而 $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \sin 54^\circ$（它等于 $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$，你可以验证两者结果相同）。

第 (iii) 部分

把第 (ii) 部分的方程除以 4：

$$\sin^2 x + \tfrac{1}{4} = \sin^2 2x.$$

将它与 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha = \sin^2 6\alpha$ 比较。若设 $x = 3\alpha$，则自然有 $2x = 6\alpha$，而只要

$$\sin^2 5\alpha = \tfrac{1}{4} \qquad 及 \qquad \sin 3\alpha \text{ 是第 (ii) 部分四个值之一},$$

两条方程便吻合。

想一想 $\sin 3\alpha$ 是那些值之一就足够了吗?

足够：在第 (ii) 部分我们看到，方程 $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin^2 2x$ 只通过 $s = \sin x$ 依赖于 x，而那四个 s 值都满足它。所以任何正弦取这些值之一的 x 都可行。

取 $\alpha = 6^\circ$。则 $5\alpha = 30^\circ$，所以 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$；而 $3\alpha = 18^\circ$，所以 $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$，正是我们的值之一。因此

$$\sin^2 18^\circ + \sin^2 30^\circ = \sin^2 36^\circ,$$

$\alpha = 6^\circ$ 是一个解。

取 $\alpha = 42^\circ$。则 $5\alpha = 210^\circ$，所以 $\sin 5\alpha = -\frac{1}{2}$，$\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$；而 $3\alpha = 126^\circ$，所以 $\sin 3\alpha = \sin 54^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$，同样是我们的值之一。所以 $\alpha = 42^\circ$ 是一个解。

因此两个合适的值是 $\alpha = 6^\circ$ 和 $\alpha = 42^\circ$。

同样的方法亦给出 $\alpha = 66^\circ$（$5\alpha = 330^\circ$，$\sin 3\alpha = \sin 198^\circ = -\sin 18^\circ$）及 $\alpha = 78^\circ$（$5\alpha = 390^\circ$，$\sin 3\alpha = \sin 234^\circ = -\sin 54^\circ$）。范围内另一个满足 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ 的角是 $\alpha = 30^\circ$,但它不成立,因为 $\sin 90^\circ = 1$ 不是我们的值之一。(事实上 $1 + \frac{1}{4} \neq \sin^2 180^\circ = 0$。)

验算

▶ $\sin 18^\circ \approx 0.30902$，而 $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.30902$。

- 对 $\alpha = 6°$：$\sin^2 18° + \sin^2 30° \approx 0.09549 + 0.25 = 0.34549$，而 $\sin^2 36° \approx 0.34549$。
- 在 $(0°, 90°)$ 上以数值方法扫描 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha - \sin^2 6\alpha$，找到的零点恰好是 $6°, 42°, 45°, 66°, 78°$。多出来的 $45°$ 并非来自第 (ii) 部分：在该处 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$。

常见错误

- 忘记 $\cos A = \cos B$ 的第二组解（即 $A = -B + 360°k$），因而在第 (i) 部分漏掉 $30°$ 和 $150°$。
- 不加说明就约去 $\cos\theta$。这里这样做没问题，但只是因为使 $\cos\theta = 0$ 的解是 $90°$，而不是 $18°$。
- 在第 (ii) 部分只给出 $\sin x$ 的正值。四个值全部都是可能的。

STEP 之外

$\sin 18°$ 之所以有精确值，是因为 $18°$ 是直角的五分之一，因此它与正五边形（regular pentagon）及黄金比例（golden ratio）息息相关：$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\varphi$。更一般地，$\cos(360°/n)$ 能只用平方根表示，当且仅当正 n 边形可以用直尺和圆规作出（尺规作图，ruler and compasses）；高斯（Gauss）证明了这取决于整除 n 的费马质数（Fermat primes）。这是域论（field theory）和伽罗瓦理论（Galois theory）的经典入门应用。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）逐步建立所需的代数，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）则说明为甚么单位根（roots of unity）与多边形密不可分。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。