详细解答

STEP II 2011，第 3 题

纯数学 · 以单调性证明不等式

> **STEP II 2011，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q3

关键思路

这里每一条不等式（inequality）都源自同一个原则：如果一个函数（function）从零出发，而其导数（derivative）非负，那么它会一直保持非负。最后两个结果再加了一点变化。一旦知道某函数是递增（increasing）的，我们便可以代入两个早已知道大小次序的输入值（例如 $x \leq \arcsin x$），从而读出输出值之间的不等式。看出要比较哪两个输入值，就是整个技巧所在。

解答

第 (i)(a) 部分

求导，并对 $x\cos x$ 使用乘积法则（product rule），

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ 时，$x \geq 0$ 及 $\sin x \geq 0$ 均成立，所以 $f'(x) \geq 0$，因此 f 在此区间上递增。

故此，当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ 时，我们有 $x \geq 0$，所以 $f(x) \geq f(0) = \sin 0 - 0 = 0$，得证。

第 (i)(b) 部分

设 $h(x) = \arcsin x - x$，其中 $0 \leq x < 1$。利用题目给出的事实，

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

所以 h 递增，且 $h(x) \geq h(0) = 0$。即是说，当 $0 \leq x < 1$ 时，$\arcsin x \geq x$。

（题目给出的事实其实就是 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$，这成立是因为 $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$。）

第 (i)(c) 部分

记 $g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$。当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时，由商法则（quotient rule）得

$$g'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}.$$

由 (a) 部分，此处 $f(x) \geq 0$，而 $\sin^2 x > 0$，所以 $g'(x) \geq 0$，因此 g 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上递增。

> **想一想** 知道 g 是递增的，对处理一条涉及 $\arcsin x$ 的不等式有甚么帮助？

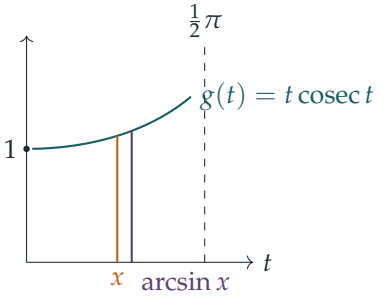
看看目标：$\dfrac{\arcsin x}{x} \geq \dfrac{x}{\sin x}$。右方是 $g(x)$。左方同样是 g 的一个值。若 $y = \arcsin x$，则 $\sin y = x$，所以

$$g(y) = \frac{y}{\sin y} = \frac{\arcsin x}{x}.$$

因此我们需要证明 $g(\arcsin x) \geq g(x)$；由于 g 递增，这可由 (b) 部分的 $\arcsin x \geq x$ 推出。

最后，取 $0 < x < 1$，并设 $y = \arcsin x$。于是 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$。另外 $0 < x < 1 < \frac{1}{2}\pi$，所以 x 和 y 都位于 g 递增的区间内。由 (b) 部分，$y \geq x$，所以 $g(y) \geq g(x)$：

$$(\arcsin x)\, x^{-1} = \frac{y}{\sin y} \geq \frac{x}{\sin x} = x \operatorname{cosec} x \qquad (0 < x < 1).$$



上图展示 $x = 0.8$ 时的论证：输入值 $\arcsin x$ 位于 x 的右方，所以递增曲线在那里较高。

第 (ii) 部分

我们照搬 (i) 的模式。首先是 (b) 的类比。设 $m(x) = x - \arctan x$，其中 $x \geq 0$。由题目给出的事实，$m'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) \geq 0$，所以 $m(x) \geq m(0) = 0$。因此

$$\arctan x \leq x \qquad (x \geq 0).$$

接着是 (c) 的类比。设 $k(x) = x^{-1}\tan x$，其中 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$。则

$$k'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x},$$

这里先将分子分母同乘以 $\cos^2 x$（它是正数），再同乘以 2。

> **想一想** 为甚么 $2x - \sin 2x \geq 0$?

这就是熟悉的“当 $t \geq 0$ 时 $\sin t \leq t$”，取 $t = 2x$ 即可。它可以用与其他部分相同的方式证明：$p(t) = t - \sin t$ 满足 $p'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ 及 $p(0) = 0$，所以当 $t \geq 0$ 时 $p(t) \geq 0$。

所以 $k'(x)$ 的分子非负，分母为正，从而 $k'(x) \geq 0$。因此 k 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上递增。

现在取 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$，并设 $y = \arctan x$。于是 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$，所以 x 和 y 都位于 k 递增的区间内，且 $\tan y = x$。由于 $y \leq x$，我们得到 $k(y) \leq k(x)$：

$$\frac{x}{\arctan x} = \frac{\tan y}{y} \leq \frac{\tan x}{x}.$$

x 和 $\arctan x$ 都是正数，所以两边同乘以 $x \arctan x$ 不会改变不等号的方向：

$$(\tan x)(\arctan x) \geq x^2 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi),$$

得证。

验算

- 在 (c) 中取 $x = \frac{1}{2}$：$\arcsin(\frac{1}{2}) / \frac{1}{2} = \pi/3 \approx 1.0472$，而 $\frac{1}{2}\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \approx 1.0429$。不等式成立，而且只是勉强成立，这正符合预期：当 $x \to 0$ 时两边都趋向 1。
- 在 (ii) 中取 $x = 1$：$\tan 1 \cdot \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi \tan 1 \approx 1.2232 \geq 1$。
- 当 x 很小时，$\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3$ 及 $\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3$，所以两者之积为 $x^2 + O(x^6)$：(ii) 中的不等式在 0 附近极之紧。我们在 20,000 个随机点作数值验算，确认了上述每一条不等式和每一条导数公式。

常见错误

- 在 (c) 中比较 g 在错误的一对点上的值，或忘记检查 $\arcsin x$ 是否位于已知 g 递增的区间 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之内。
- 在 (ii) 中，输入值之间的不等式方向相反（$\arctan x \leq x$），所以输出值之间的不等式方向也相反。若把方向弄反，就会得出错误的不等式。
- 将不等式两边同乘以某数时，没有说明该乘数（$x \arctan x$ 或 $\cos^2 x$）是正数。

STEP 之外

贯穿全题的原则——非负导数迫使函数递增——是均值定理（mean value theorem）的推论，任何分析（analysis）入门课程都会证明这条定理。比较 $g(x)$ 与 $g(\arcsin x)$ 的技巧（其中 sin 与 arcsin 互为反函数），与你日后在反函数（inverse functions）和凸性（convexity）中会遇到的想法一脉相承。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对均值定理及其推论给出了严谨而易读的证明。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。