详细解答

STEP II 2011，第 2 题

纯数学 · 丢番图方程

> **STEP II 2011，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q2

关键思路

每当见到 x^3+y^3，就应把它因式分解（factorise）：$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$。一旦 $x+y$ 被确定（在 (i) 中为 k，在 (ii) 中为 z^2），因式 $x+y$ 便可与 kz^3 的一部分约去，剩下一个二次条件。对这个二次式配方（completing the square），可把它化成“某式 $=3\times$ 完全平方数（perfect square）”的形式，再利用上下界（bounds），便只剩下少数几个立方数需要逐一尝试。这正是题目先要求列出不超过 10^3 的立方数的原因。

以供参考：$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000$。

解答

第 (i) 部分

由于 $x+y=k$，

$$kz^3=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=k(x^2-xy+y^2),$$

而 $k>0$，故 $z^3=x^2-xy+y^2$。代入 $y=k-x$：

$$\begin{aligned} z^3 &= x^2-x(k-x)+(k-x)^2 \\ &= x^2-kx+x^2+k^2-2kx+x^2 \\ &= k^2-3kx+3x^2, \end{aligned}$$

得证。

完全平方数。两边乘以 4 并配方：

$$4z^3-k^2=12x^2-12kx+3k^2=3(4x^2-4kx+k^2)=3(k-2x)^2.$$

所以 $\dfrac{4z^3-k^2}{3}=(k-2x)^2$，即整数 $k-2x$ 的平方。

上下界。由上式，$4z^3=k^2+3(k-2x)^2\geq k^2$，故 $\frac{1}{4}k^2\leq z^3$。至于上界，注意 $3kx-3x^2=3x(k-x)=3xy$，所以

$$z^3=k^2-3xy<k^2,$$

因为 x 和 y 都是正数。因此 $\frac{1}{4}k^2\leq z^3<k^2$。

$k=20$ 的情况。我们寻找满足 $x+y=20$ 的解。上下界给出 $100\leq z^3<400$，从立方数列表可知 $z^3\in\{125,216,343\}$。接着检验 $(4z^3-400)/3$ 是否为完全平方数：

- $z=5$：$(500-400)/3=100/3$，不是整数；
- $z=6$：$(864-400)/3=464/3$，不是整数；
- $z=7$：$(1372-400)/3=324=18^2$。✓

所以在 $k=20$ 时 $(k-2x)^2=18^2$。由于 $x<y$ 意味着 $2x<x+y=k$，故 $k-2x>0$，因此 $k-2x=18$，得 $x=1$、$y=19$。验算：$1^3+19^3=1+6859=6860=20\times343=20\times7^3$。所以

$$x=1,\quad y=19,\quad z=7$$

是 $(*)$ 在 $k=20$ 时的一个解。

第 (ii) 部分

现设 $x+y=z^2$。则

$$kz^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=z^2(x^2-xy+y^2),$$

两边除以 z^2（由于 $z>0$，这是容许的），得 $x^2-xy+y^2=kz$。

> ? **想一想** 怎样才能令同样的“完全平方”技巧在这里奏效？

利用恒等式 $4(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2+3(x-y)^2$，这其实就是 (i) 中所得结果的另一种面貌（展开右边即可验证）。代入 $x+y=z^2$ 和 $k=19$，得

$$76z=z^4+3(y-x)^2,\qquad \text{即}\qquad 3(y-x)^2=z\,(76-z^3).$$

由于 $y>x$，左边为正，故 $z^3<76$，因此 $z\in\{1,2,3,4\}$。我们需要 $z(76-z^3)/3$ 为完全平方数：

- $z=1$：$75/3=25=5^2$，所以 $y-x=5$；但 $x+y=1$，对正整数而言不可能。
- $z=2$：$2\times68/3=136/3$，不是整数。

- $z=3$：$3\times 49/3=49=7^2$，所以 $y-x=7$ 且 $x+y=9$，得 $x=1$、$y=8$。
- $z=4$：$4\times 12/3=16=4^2$，所以 $y-x=4$ 且 $x+y=16$，得 $x=6$、$y=10$。

验算：$1^3+8^3=513=19\times 27=19\times 3^3$，以及 $6^3+10^3=1216=19\times 64=19\times 4^3$。所以 $(*)$ 在 $k=19$ 时的两个解为

$$(x,y,z)=(1,8,3)\quad 及\quad (x,y,z)=(6,10,4).$$

（事实上，上述论证显示在 $x+y=z^2$ 的条件下，只有这两个解。）

验算

- 用一个简单例子检验 (i) 的恒等式：$k=5$、$x=2$、$y=3$ 给出 $x^3+y^3=35=5\times 7$，而 $k^2-3kx+3x^2=25-30+12=7$。✓
- 如上文所做，把每个答案代回 $(*)$：$6860=20\times 343$、$513=19\times 27$、$1216=19\times 64$。
- 用电脑搜索所有满足 $x+y=20$ 的 $x<y$，以及在 $k=19$ 时所有满足 $x+y=z^2$ 的 $x<y$，结果正好找到这些解，再无其他。

常见错误

- 忘记正负号：$(k-2x)^2=18^2$ 也容许 $k-2x=-18$，但这会给出 $x=19>y$，被条件 $x<y$ 排除。
- 在 (ii) 中把 $z=1$ 保留为解：$y-x=5$ 本身没有问题，但它不能与 $x+y=1$ 同时成立。

STEP 之外

像 $x^3+y^3=kz^3$ 这类方程，问的是哪些整数 k 可以写成两个有理数（rational number）立方之和。这个问题直接通向椭圆曲线（elliptic curves），至今仍未完全解决；著名的的士数（taxicab number）$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$ 也属于同一领域。这里用到的技巧（因式分解、配方，再利用上下界把搜索范围收窄至有限）是初等数论（elementary number theory）的基本功。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是很好的下一步读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。