详细解答

STEP II 2011，第 12 题

概率与统计 · 博弈中的等比级数

STEP II 2011，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s2-q12

关键思路

每局最多只有三分，所以我们可以列出一局所有可能的进程（只有八个序列），并把它们分为“Xavier 胜”、“Younis 胜”和“无人胜出，再打一局”三类。由于每一局都重新开始，整场比赛是一个几何过程（geometric process）：Younis 赢得整场比赛的概率（probability），等于 Younis 赢得一局的概率除以一局分出胜负的概率。

解答

把每一局写成一串得分者，例如 XYY 表示 Xavier 赢第一分，而 Younis 赢第二和第三分。第一分以概率 p 归 X。此后，每一分以概率 p 归于与上一分相同的球员，并以概率 $1-p$ 转换到另一位球员。

只要同一位球员连赢两分，该局便分出胜负，因此可能的局为：

序列	概率	结果
XX	$p \cdot p$	Xavier 胜
YXX	$(1-p)(1-p)p$	Xavier 胜
YY	$(1-p)p$	Younis 胜
XYY	$p(1-p)p$	Younis 胜
XYX	$p(1-p)(1-p)$	再打一局
YXY	$(1-p)(1-p)(1-p)$	再打一局

（一局一旦出现 XX 或 YY，便不需要第三分；我们设想第三分有没有打，都没有分别。）未分胜负的局，正好是得分交替出现的局，即后两分都“转换”。

第 (i) 部分

设 A 为 Younis 赢得某一局的事件（event），C 为该局未分胜负的事件。由上表，

$$\mathrm{P}(A) = (1-p)p + p^2(1-p) = p(1-p)(1+p) = p(1-p^2),$$
$$\mathrm{P}(C) = p(1-p)^2 + (1-p)^3 = (1-p)^2(p+(1-p)) = (1-p)^2.$$

各局在相同规则下独立（independent）进行，所以 Younis 赢得整场比赛，当且仅当对某个 $n \geq 1$，首 $n-1$ 局都未分胜负，而 Younis 赢第 n 局。因此

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(C)^{n-1}\,\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(C)},$$

其中由于当 $p \neq 0$ 时 $\mathrm{P}(C) = (1-p)^2 < 1$，这个几何级数（geometric series）收敛（converges）。（等价地：若第一局未分胜负，我们便回到起点，所以 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)\,w$。）而 $1-(1-p)^2 = 2p-p^2 = p(2-p)$，所以

$$w = \frac{p(1-p^2)}{p(2-p)} = \frac{1-p^2}{2-p},$$

其中约去 p 用到了 $p \neq 0$。这就是所求的结果。

与 $\frac{1}{2}$ 比较。我们有

$$w - \tfrac{1}{2} = \frac{2(1-p^2)-(2-p)}{2(2-p)} = \frac{p-2p^2}{2(2-p)} = \frac{p(1-2p)}{2(2-p)}.$$

当 $0 < p \leq 1$ 时，因子 p 和 $2-p$ 都是正数，所以 $w - \frac{1}{2}$ 与 $1-2p$ 同号。因此当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时 $w > \frac{1}{2}$，当 $p > \frac{1}{2}$ 时 $w < \frac{1}{2}$（而在 $p = \frac{1}{2}$ 时 $w = \frac{1}{2}$，正如对称性所要求）。

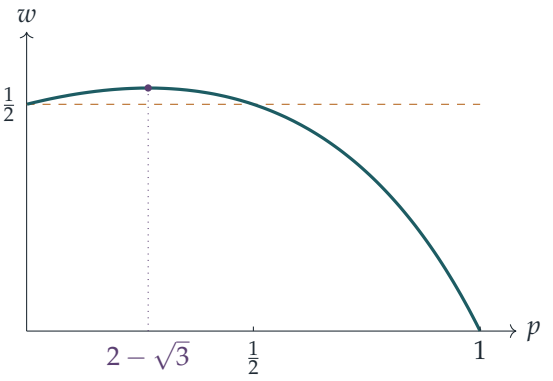
? **想一想** 降低 p 会令 Younis 更有可能赢得第一分。这是否必定对 Younis 有利?

w 是否随 p 递减? 不是。用商法则（quotient rule）求导，

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{-2p(2-p)+(1-p^2)}{(2-p)^2} = \frac{p^2-4p+1}{(2-p)^2}.$$

分子的根为 $p = 2 \pm \sqrt{3}$,其中只有 $2-\sqrt{3} \approx 0.268$ 位于 $[0,1]$ 之内。所以当 $0 < p < 2-\sqrt{3}$ 时 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p > 0$，当 $2-\sqrt{3} < p \leq 1$ 时 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p < 0$。在区间 $0 < p < 2-\sqrt{3}$ 上，减小 p 实际上会减小 w。例如 $w(0.2) = \frac{8}{15} \approx 0.533$，但 $w(0.1) = \frac{99}{190} \approx 0.521$。

原因是 p 同时扮演两个角色。较小的 p 让 Younis 取得第一分，但同时也令连胜不太可能出现，因为赢得一分的球员只会以概率 p 继续得分。当 p 极小时，得分倾向交替出现，第一分的优势便被抵销。最大值为 $w(2-\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3} \approx 0.536$，而当 $p \to 0$ 时 $w \to \frac{1}{2}$。



第 (ii) 部分

当 $p = \frac{2}{3}$ 时，

$$w = \frac{1 - \frac{4}{9}}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{5/9}{4/3} = \frac{5}{12}.$$

由于 $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9} < 1$，比赛以概率 1 结束，所以 Xavier 赢得比赛的概率为 $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$。Xavier 的期望收益（expected gain）为

$$\tfrac{7}{12} \times 1 - \tfrac{5}{12} \times k,$$

而当此值为零时，比赛是公平的（fair），即

$$k = \frac{7}{5}.$$

所以当 Younis 胜出时，Xavier 应付给 Younis £1.40。

第 (iii) 部分

当 $p = 0$ 时，Younis 必定赢得每一局的第一分，而之后每一分都必定由输掉上一分的球员赢得。所以每一局都以概率 1 按 YXY 进行。没有人能连赢两分，比赛永不结束：两位球员都不会胜出。

这就是第 (i) 部分排除 $p = 0$ 的原因。此时 $\mathrm{P}(A) = 0$ 且 $1 - \mathrm{P}(C) = 0$，所以公式 $w = \mathrm{P}(A)/(1 - \mathrm{P}(C))$ 变成 $0/0$。当 $p \to 0$ 时 $\frac{1-p^2}{2-p} \to \frac{1}{2}$ 这个事实，描述的是那些邻近而最终会结束的比赛；它并不是 $p = 0$ 这个情况本身的概率。

验算

- 当 $p = \frac{1}{2}$ 时，每一分都等于掷一枚公平的硬币，所以 w 应为 $\frac{1}{2}$。公式给出 $\frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$。
- 当 $p = 1$ 时，Xavier 必定赢得首两分，所以 $w = 0$。公式给出 0。

- 表中六局的概率之和为 1。
- 对全部八个得分序列作精确枚举（p 由 0.01 至 0.99），重现了 w；而在 $p = \frac{2}{3}$ 下模拟 200 000 场比赛，Younis 胜出的比例为 41.6%，对比 $\frac{5}{12} \approx 41.7\%$。

常见错误

- 把转换规则弄反。概率 p 属于赢得上一分的球员，而不是属于 Xavier。
- 把错误的乘积设为相等，得出 $k = \frac{5}{7}$。公平的意思是 $\mathrm{P}(\text{X 胜}) \times 1 = \mathrm{P}(\text{Y 胜}) \times k$，所以较不可能胜出的一方得到较大的赔付。
- 在第 (iii) 部分把 $p = 0$ 代入公式，并声称每位球员的概率都是 $\frac{1}{2}$，但事实上比赛永不结束。

STEP 之外

这里的得分构成一条马可夫链（Markov chain）：每一分只取决于前一分。把比赛分拆为相同而独立的局，是更新（renewal）论证的一个例子；而方程 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)w$ 是“首步分析”（first-step analysis）最简单的例子，这是计算马可夫链中吸收概率（absorption probabilities）的标准方法。第 (iii) 部分展示了吸收失败时的情况：链永远循环下去。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）以大学一年级的程度介绍马可夫链及这些方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。